第4章 代数と幾何の対応
§4 ザリスキ閉包とイデアルの商

担当　乳井昌道

集合 $S \subset k^n$ 　がアフィン多様体であってもなくても, 集合
$I(S) = \{f \in k[x_1, \ldots, x_n]:$ すべての $a \in S$ に対して $f(a) = 0\}$
は $k[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアルである. また、これは根基イデアルである.
イデアル ― 多様体対応によって $V(I(S))$ は多様体になる.

命題1

$S \subset k^n$ のとき, アフィン多様体 $V\left(I(S)\right)$ はSを含む最小の多様体である.

つまり, $W \subset k^n$ がSを含む多様体ならば $V\left(I(S)\right) \subset W$ である.

(証明)

対応Iは包含関係を逆転するので, $W \supset S$ ならば, $I(W) \subset I(S)$ となる.

Vも包含関係を逆転するので, $V\left(I(W)\right) \supset V\left(I(S)\right)$ となる.

W はアフィン多様体なので, §2の定理7より $V\left(I(W)\right) = W$

であるから $V\left(I(S)\right) \subset V\left(I(W)\right) = W$

定義2 : ザリスキ閉包

アフィン空間の部分集合のザリスキ閉包(Zariski closure)とは,
その集合を含むような最小のアフィン代数多様体である.

$S \subset k^n$ のとき, S のザリスキ閉包を $\overline{S}$ と記す.

これは $V\left(I\left(S\right)\right)$ と等しい.

定理3：閉包定理(第3章§2の定理3(ｉ))

k を代数的閉体とする. $V = V(f_1,\ldots,f_s) \subset k^n$ とする.
$\pi_l : k^n \to k^{n-l}$ を後ろの $n-l$ 成分への射影とする.
I_l を l 次の消去イデアル $I_l = \langle f_1,\ldots,f_s \rangle \cap k[x_{l+1},\ldots,x_n]$
とすると $V(I_l)$ は $\pi_l(V)$ のザリスキ閉包である.

定理3(証明)

命題1より, $V(I_l) = V(I(\pi_l(V)))$ を示せばよい.

第3章§2の補題1より, $\pi_l(V) \subset V(I_l)$

$V(I(\pi_l(V)))$ は $\pi_l(V)$ を含む最小の多様体であるから,

$V(I(\pi_l(V))) \subset V(I_l)$

逆向きの包含関係を示す.

$f \in I(\pi_l(V))$ とすると, 任意の $(a_{l+1},\ldots,a_n) \in \pi_l(V)$ に対して

$f(a_{l+1},\ldots,a_n) = 0$

f を $k[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ の元とみなすと, 任意の $(a_1,\ldots,a_n) \in V$

に対して $f(a_1,a_2,\ldots,a_n) = 0$

定理3(証明)

ヒルベルトの零点定理(§1の定理2)より, $f^N \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ となるような整数 N が存在する.

f は $x_1, \ldots, x_l$ に依存しないので, f^N もそうである.

したがって $f^N \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \cap k[x_{l+1}, \ldots, x_n] = I_l$

つまり $f \in \sqrt{I_l}$ であり, $I(\pi_l(V)) \subset \sqrt{I_l}$ となる.

以上で

$$V(I_l) = V\left(\sqrt{I_l}\right) \subset V\left(I\left(\pi_l(V)\right)\right)$$

となる.

集合の差

集合の差: 多様体でない場合がある.

(例)

$K \subset k[x,y,z]$ をイデアル $\langle xz, yz \rangle$ とし, $W = V(K)$ とする.

$I = \langle z \rangle$ とし, $V = V(I)$ とする.

W は xy 平面と z 軸の和集合(第1章§2)

V は xy 平面なので, $W - V$ は z 軸から原点を除いたもの.

これは多様体でない(第1章§2の演習問題8)

z 軸 $V(x,y)$ が $W - V$ を含む最小の多様体である.

ザリスキ閉包 $\overline{W - V}$ に対応するイデアルを計算する方法は？

命題4

V と W を $V \subset W$ となるような多様体とする.
このとき $W = V \cup \left(\overline{W - V}\right)$ となる.

(証明)
W は $W - V$ を含む多様体なので, $W - V$ を含む最小の多様体は W に含まれなければならない. つまり, $\overline{W - V} \subset W$ がわかる.
仮定 $V \subset W$ より $V \cup \left(\overline{W - V}\right) \subset W$ がわかる.
逆向きの包含関係を示す. $V \subset W$ より $W = V \cup (W - V)$ がわかる.
$W - V \subset \overline{W - V}$ なので, 示したい $W \subset V \cup \left(\overline{W - V}\right)$ が得られる.

定義5:イデアル商

I, J を $k\left[x_1,\ldots,x_n\right]$ のイデアルとする. $I:J$ を

$$\{f \in k\left[x_1,\ldots,x_n\right] : \text{任意の } g \in J \text{ に対して } fg \in I\}$$

と定義し, I の J によるイデアル商(ideal quotient)あるいはコロンイデアル(colon ideal)という.

(例) $k\left[x,y,z\right]$ の中で $\langle xz, yz\rangle : \langle z\rangle$

$$= \left\{f \in k\left[x,y,z\right] : f \cdot z \in \langle xz, yz\rangle\right\}$$

$$= \left\{f \in k\left[x,y,z\right] : f \cdot z = Axz + Byz\right\}$$

$$= \left\{f \in k\left[x,y,z\right] : f = Ax + By\right\}$$

$$= \langle x, y\rangle$$

命題6

I と J を $k\left[x_1,\ldots,x_n\right]$ のイデアルとすると, $I:J$ も $k\left[x_1,\ldots,x_n\right]$ のイデアルであり, $I:J$ は I を含む.

命題6(証明)

($I : J$ が I を含むことの証明)
I がイデアルであるから, $f \in I$ ならば任意の $g \in k\left[x_1, \ldots, x_n\right]$
に対して $fg \in I$
特に任意の $g \in J$ に対して $fg \in I$

命題6(証明)

($I:J$ がイデアルであることの証明)

$0 \in I$ より $0 \in I:J$

$f_1, f_2 \in I:J$ なら任意の $g \in J$ に対して $f_1 g, f_2 g$ は I に属する.

I はイデアルだから, $(f_1+f_2)g = f_1 g + f_2 g \in I$ が任意の $g \in J$ に対して成り立つ. よって, $f_1+f_2 \in I:J$

$f \in I:J$ と $h \in k[x_1,\dots,x_n]$ に対して $fg \in I$

I がイデアルであることから, 任意の $g \in J$ に対して $hfg \in I$ となり, これは $hf \in I:J$ を意味する.

※イデアルの定義は第1章§4の定義1を参照