第2章　グレブナ基底
§1　Introduction

担当　乳井昌道

4つの問題

a. イデアル記述問題
b. イデアル所属問題
c. 多項式の連立方程式の解を求める問題
d. 陰関数表示化の問題

a. イデアル記述問題

すべてのイデアル$I \subset k[x_1,\ldots,x_n]$ は有限生成集合を持つか？言い換えれば, $I = \langle f_1,\ldots,f_s \rangle$ となるようにうまく$f_i \in k[x_1,\ldots,x_n]$をとれるか.

b. イデアル所属問題

与えられた $f \in k\left[x_1,\ldots,x_n\right]$ と
イデアル $I = \left\langle f_1,\ldots,f_s \right\rangle$ に対して, $f \in I$ であるか否かを判定せよ. 幾何学的にいうと, この問題は $V\left(f_1,,\ldots f_s\right)$ が多様体 $V\left(f\right)$ 上にあるかどうかを判定する問題と密接に関連がある.

c. 多項式の連立方程式の解を求める問題

多項式によって与えられる連立方程式

$$f_1(x_1,\ldots,x_n)=\cdots=f_n(x_1,\ldots,x_n)=0$$

の共通解 $(x_1,\ldots,x_n)\in k^n$ をすべて求めよ.

もちろん, これはアフィン多様体 $V(f_1,\ldots,f_s)$ の点を求めることと同じ意味である.

d. 陰関数表示化の問題

Vを k^nの部分集合で

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(t_1,\ldots,t_m), \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(t_1,\ldots,t_m) \end{aligned}$$

とパラメータ表示されているものとする. もし各 g_i が変数 t_jの多項式(あるいは有理関数)であるならば, V はアフィン多様体かあるいはその部分集合である. このとき, この多様体を定義する多項式方程式系を求めよ.

例1～3

a～dの問題を解くためのアルゴリズム上のテクニックが見られる特殊な例

例1

a. イデアル記述問題

n = 1のときは, 第1章§5で解いた.(§5系4を参照)

$I \subset k[x]$ が与えられたとき, ある $g \in k[x]$ があって $I = \langle g \rangle$ となる.

例1(続き)

与えられた $f \in k[x]$ に対して, $f \in I = \langle g \rangle$ であるかどうかをチェックするため, f を g で割る. すると

$$f = q \cdot g + r$$

と書ける. ここで $q, r \in k[x]$ であり, r = 0 あるいは $\deg(r) < \deg(g)$ となる. このとき, $f \in I$ と r=0 は同値である. すなわち, n=1のときには, イデアル所属問題にはアルゴリズムによる判定法がある.

例2

c. 多項式の連立方程式の解を求める問題

n(= 変数の個数)を1とは限らない数として, 多項式で与えられた(1)の方程式系を解く.
方程式はすべて線型(全次数1)

(1)の行列を行簡約階段形(reduced row echelon form)になるまで変形する.
もとの方程式系のすべての解が, 行簡約階段形の任意変数に値を代入することによって得られる.

例3

d. 陰関数表示化の問題

n を任意として, k^n の任意の部分集合V が(3)の方程式系でパラメータ表示されているとする. (3)の陰関数表示化を考える.

(3)の行簡約階段形を計算する.
その中で変数 $x_1,\ldots,x_n$ だけを含む行の表す方程式によって V が定義される.