定理7

I と J を $k\left[x_1,\ldots,x_n\right]$ のイデアルとする. このとき

$$V\left(I:J\right)\supset\overline{V\left(I\right)-V\left(J\right)}$$

となる. さらに k が代数的閉体で I が根基イデアルならば

$$V\left(I:J\right)=\overline{V\left(I\right)-V\left(J\right)}$$

となる.

定理7(証明)

($V(I:J) \supset \overline{V(I)-V(J)}$ の証明)
$I:J \subset I\big(V(I)-V(J)\big)$ を証明する. $f \in I:J, x \in V(I)-V(J)$
と仮定すると, 任意の $g \in J$に対して $f(x)g(x)=0$ である.
$x \notin V(J)$ なので $g(x) \neq 0$ となるような $g \in J$ が存在する.
したがって$f(x)=0$ が任意の $x \in V(I)-V(J)$ に対して
成り立つ.
よって$f \in I\big(V(I)-V(J)\big)$ となり, $I:J \subset I\big(V(I)-V(J)\big)$
V は包含関係を逆転するから, $V(I:J) \supset V\Big(I\big(V(I)-V(J)\big)\Big)$

※定義2より $V\Big(I\big(V(I)-V(J)\big)\Big) = \overline{V(I)-V(J)}$

定理7(証明)

($V(I:J)=\overline{V(I)-V(J)}$ の証明)
次にkを代数的閉体とし, $I=\sqrt{I}$ とする.
$x\in V(I:J)$ とする. つまり
(1)すべての $g\in J$ に対して $hg\in I$ が成り立つならば $h(x)=0$
とする. $h\in I(V(I)-V(J))$ をとる. $g\in J$ ならばhが
$V(I)-V(J)$ 上で消えて, gが $V(J)$ 上で消えるから, hgは
$V(I)$ 上で消える. 零点定理(§2の定理6)より $hg\in\sqrt{I}$
仮定 $I=\sqrt{I}$ より $hg\in I$ が任意の $g\in J$ に対して成り立つ.
(1)より $h(x)=0$ となる. 以上より $x\in V(I(V(I)-V(J)))$
$V(I:J)\subset V(I(V(I)-V(J)))$ が示された.

系8

VとWをk^nの多様体とする. このとき,

$$I(V):I(W)=I(V-W)$$

が成り立つ.

(証明)

定理7で$I:J\subset I\left(V(I)-V(J)\right)$を示した.

これを$I=I(V)$と$J=I(W)$に適用すると

$$I(V):I(W)\subset I(V-W)$$

逆向きの包含関係はイデアル商の定義(定義5)より従う.

命題9：イデアル商の性質

I,J,K を $k\left[x_1,\ldots,x_n\right]$ のイデアルとする.

(ｉ) $I:k\left[x_1,\ldots,x_n\right]=I$

(ⅱ) $IJ\subset K$と$I\subset K:J$ は同値.

(ⅲ) $J\subset I$ と $I:J=k\left[x_1,\ldots,x_n\right]$ は同値

(証明)

演習問題5

命題10

$1 \leq i \leq r$ に対して I, I_i, J, J_i, K を $k\left[x_1, \ldots, x_n\right]$ のイデアルとする.

(2) $\left(\bigcap_{i=1}^{r} I_i\right) : J = \bigcap_{i=1}^{r} \left(I_i : J\right)$

(3) $I : \left(\sum_{i=1}^{r} J_i\right) = \bigcap_{i=1}^{r} \left(I : J_i\right)$

(4) $\left(I : J\right) : K = I : JK$

(証明)

演習問題6

(3)の特別な場合

多項式 f とイデアル I に対して, $I:\langle f\rangle$ を $I:f$ と記す.
(3)の特別な場合として

(5) $$I:\langle f_1, f_2, \ldots, f_r\rangle = \bigcap_{i=1}^{r}(I:f_i)$$

が成り立つ.

※§3の系3

命題11

I をイデアル, g を $k\left[x_1,\ldots,x_n\right]$ の元とする。
$\left\{h_1,\ldots,h_p\right\}$ がイデアル $I\cap\langle g\rangle$ の基底ならば $\left\{h_1/g,\ldots,h_p/g\right\}$
$I:\langle g\rangle$ の基底となる.

命題11(証明)

$a \in \langle g \rangle$ とすると, ある多項式 b を用いて $a = bg$ となる.
そこで $f \in \langle h_1 / g, \ldots, h_p / g \rangle$ ならば

$$af = bgf \in \langle h_1, \ldots, h_p \rangle = I \cap \langle g \rangle \subset I$$

となる. したがって $f \in I : \langle g \rangle$

逆に $f \in I : \langle g \rangle$ と仮定する.
すると $fg \in I$ である. $fg \in \langle g \rangle$ なので $fg \in I \cap \langle g \rangle$
$I \cap \langle g \rangle = \langle h_1, \ldots, h_p \rangle$ ならば, $fg = \sum_{i=1}^{r} r_i h_i$ と多項式 r_i を用いて書けることを意味している.
$h \in \langle g \rangle$ なので h_i / g は多項式であり, $f = \sum_{i=1}^{r} r_i (h_i / g)$
これより $f \in \langle h_1 / g, \ldots, h_p / g \rangle$

イデアル商の基底を計算するアルゴリズム

定理11, イデアルの交わりを求める手順(§3), (5)を合わせる.
$I=\langle f_1,\ldots,f_r\rangle$ と $J=\langle g_1,\ldots,g_s\rangle=\langle g_1\rangle+\cdots+\langle g_s\rangle$ が与えられたとき, $I:J$ の基底を計算するためにまず, $I:\langle g_i\rangle$ の基底を各 i に対して計算する.
定理11より, $\langle f_1,\ldots,f_r\rangle\cap\langle g_i\rangle$ の基底の計算に帰着される.
この計算は, $\langle tf_1,\ldots,tf_r,(1-t)g_i\rangle$ のグレブナ基底を t がすべての x_i より大きいような lex 順序で計算し, t によらない基底の元を集める(イデアルの交わりを求めるアルゴリズム).
割り算アルゴリズムを用いると, g_i でそれらの元を割って $I:\langle g_i\rangle$ の基底が得られる.

イデアル商の基底を計算するアルゴリズム

最後にイデアルの交わりを求めるアルゴリズムを $s-1$ 回適用することで, $I:J$ の基底を計算する.
まず $I:\langle g_1, g_2 \rangle = \left(I:\langle g_1 \rangle\right) \cap \left(I:\langle g_2 \rangle\right)$ の基底を計算し,
続いて $I:\langle g_1, g_2, g_3 \rangle = \left(I:\langle g_1, g_2 \rangle\right) \cap \left(I:\langle g_3 \rangle\right)$ の基底を計算し,
と続ける.