§5の終結式を利用して、拡張定理(3章§1定理3)を証明する。

拡張定理の証明のためにやること

(1)終結式の理論をｎ変数の多項式の場合にまで適合させる。

(2)どのようにして終結式が部分解の拡張に使われるのか示す。

(3)イデアルが2つの多項式から生成されるに場合において拡張定理を証明する。

(4)任意のイデアルに対する拡張定理を証明する。

一般終結式

3つ以上の多項式に対する終結式を定義する.

$$u_2 f_2 + \cdots + u_s f_s \in C\left[u_2, \ldots, u_s, x_1, \ldots, x_n\right]$$

f_1 は同じ環の中の多項式とみなすことができる. 命題1によって

f_1 と $u_2 f_2 + \cdots + u_s f_s$ の終結式は $C\left[u_2, \ldots, u_s, x_1, \ldots, x_n\right]$ に属する.

終結式を変数 $u_2, \ldots, u_s$ のベキにより展開する.

$$Res\left(f_1, u_2 f_2 + \cdots + u_s f_s, x_1\right) = \sum_{\alpha} h_\alpha\left(x_2, \ldots, x_n\right) u^\alpha$$

と書く. 各 α に対して, u^α は単項式 $u_2^{\alpha_2} \cdots u_s^{\alpha_s}$ であり,

$h_\alpha \in C\left[x_2, \ldots, x_n\right]$ である. この多項式 h_α たちを $f_1, \ldots, f_s$ の

一般終結式と呼ぶ.

定理5(拡張定理)

イデアル $I=\langle f_1,\ldots,f_s\rangle\subset C[x_1,\ldots,x_n]$ をとり, I_1を I の1次の消去イデアルとする. 各 $1\le i\le s$ に対して, f_i を次の形に書く.

$$f_i=g_i(x_2,\ldots,x_n)x_1^{N_i}+\ (\ x_i\ \text{の次数が} < N_i\ \text{である項})$$

ここで, $N_i\ge 0$ であり, $g_i\in C[x_2,\ldots,x_n]$ はゼロではない.
部分解 $(c_2,\ldots,c_n)\in V(I_1)$ があると仮定する.
もし $(c_2,\ldots,c_n)\notin V(g_1,\ldots,g_s)$ であるならば, $c_1\in C$ が存在して, $(c_1,c_2,\ldots,c_n)\in V(I)$ となる.

定理5(証明)

$f_1(x_1,c),\ldots,f_s(x_1,c)$の共通根を求める.

$c \notin V(g_1,\ldots,g_s)$ であるから, $g_1(c) \neq 0$ と仮定する. $f_1,\ldots,f_s$ の一般終結式を$h_\alpha \in C[x_2,\ldots,x_n]$ とする.

$$Res(f_1, u_2 f_2 + \cdots + u_s f_s, x_1) = \sum_\alpha h_\alpha u^\alpha$$

と書ける.

定理5(証明)

ここで, h_α は1次の消去イデアル I_1 に属していることを証明する.

環 $C\left[u_2,\ldots,u_s,x_1,\ldots,x_n\right]$ において終結式を計算しているのだから, 命題1より

$$Af_1+B\left(u_2f_2+\cdots+u_sf_s\right)=Res\left(f_1,u_2f_2+\cdots+u_sf_s,x_1\right)$$

と, $A,B\in C\left[u_2,\ldots,u_s,x_1,\ldots,x_n\right]$ を使って書ける.

$A=\sum_\alpha A_\alpha u^\alpha$ および $B=\sum_\beta B_\beta u^\beta$ とおく. $\left(A_\alpha,B_\beta\in C\left[x_1,\ldots,x_n\right]\right)$

$h_\alpha\in\left\langle f_1,\ldots,f_s\right\rangle=I$ であることを上式の u^α の係数を比較することによって証明する.

定理5(証明)

$e_2 = (1,0,\ldots,0),\ldots,e_s = (0,0,\ldots,1)$ とおく. すると
$u_2 f_2 + \cdots + u_s f_s = \sum_{i \geq 2} u^{e_i} f_i$ である.

$$\sum_{\alpha} h_\alpha u^\alpha = \sum_{\alpha} \left(A_\alpha f_1 + \sum_{\substack{i \geq 2, \beta \\ \beta + e_i = \alpha}} B_\beta f_i \right) u^\alpha$$

u^α の係数を比較すると $h_\alpha = A_\alpha f_1 + \sum_{\substack{i \geq 2, \beta \\ \beta + e_i = \alpha}} B_\beta f_i$

となり, $h_\alpha \in I$ である. $h_\alpha \in C[x_2,\ldots,x_n]$ であるから, すべての α に対して $h_\alpha \in I_1$ であることが証明された.

定理5(証明)

$c \in V(I_1)$ であるから, $h_\alpha(c)=0$ がすべての α に対して成立する. このとき, 終結式 $h = Res(f_1, u_2 f_2 + \cdots + u_s f_s, x_1)$ は値 c において恒等的に消える. $c=(c_2,\ldots,c_n)$ を $(x_2,\ldots,x_n)$ に代入して得られる $C[x_1,u_2,\ldots,u_s]$ の多項式を $h(c,u_2,\ldots,u_s)$ と書くと

(8) $h(c,u_2,\ldots,u_s)=0$

を得る.

$g_2(c) \neq 0$ かつ f_2 は変数 x_1 に関する次数が $f_3,\ldots,f_s$ より大きいという仮定をおく(この仮定を(9)とする). これより

(10) $h(c,u_2,\ldots,u_s) = Res(f_1(x_1,c), u_2 f_2(x_1,c) + \cdots + u_s f_s(x_1,c), x_1)$

が導かれることを証明する.

定理5(証明)

$h = Res\left(f_1, u_2 f_2 + \cdots + u_s f_s, x_1\right)$ を定義する行列式の c での値を求めれば, $h\left(c, u_2, \ldots, u_s\right)$ はある行列式として与えられることが従う. さらに, f_1 と $u_2 f_2 + \cdots + u_s f_s$ の最高次の係数が c で消えないという条件のものに, この行列式は(10)の終結式である.

$g_1\left(c\right) \neq 0$ であるから, この条件は f_1 に対しては正しい.

$u_2 f_2 + \cdots + u_s f_s$ に対しては, 仮定(9)よりその最高次の係数は $u_2 g_2$ であり, $g_2\left(c\right) \neq 0$ であるから最高次の係数が消えることはなく, 条件は正しい.

定理5(証明)

(8)と(10)より

$$Res\left(f_1\left(x_1,c\right),u_2f_2\left(x_1,c\right)+\cdots+u_sf_s\left(x_1,c\right),x_1\right)=0$$

を得る.

$f_1\left(x_1,c\right)$と $u_2f_2\left(x_1,c\right)+\cdots+u_sf_s\left(x_1,c\right)$は$C\left[x_1,u_2,\ldots,u_s\right]$に属しているから, 命題1より終結式がゼロになり, したがって, x_1 に関して正の次数を持った共通因子 F を持つことがわかる.

F は$f_1\left(x_1,c\right)$ を割り切るので, F は $C\left[x_1\right]$の多項式であることが従う.

定理5(証明)

F は $f_2(x_1,c),\ldots,f_s(x_1,c)$ の各々を割り切る.

F が $u_2 f_2(x_1,c)+\cdots+u_s f_s(x_1,c)$ を割り切る. これは,

$$F(x_1)A(x_1,u_2,\ldots,u_s)=u_2 f_2(x_1,c)+\cdots+u_s f_s(x_1,c)$$

が, 適当な$A\in C[x_1,u_2,\ldots,u_s]$に対して成立することを意味している.

$u_2,\ldots,u_s$の係数を比較することで, F が $f_2(x_1,c),\ldots,f_s(x_1,c)$ を割り切ることが導かれる.

定理5(証明)

F は$f_1\left(x_1,c\right)$も割り切るので, F はすべての $f_i\left(x_1,c\right)$の正の次数を持つ共通因子であることがわかる.
今, c_1 を F の根とする. このとき, c_1 は自動的にすべての$f_i\left(x_1,c\right)$の共通根になる.
よって, 仮定(9)
$g_2\left(c\right)\neq 0$かつ f_2 は変数 x_1 に関する次数が $f_3,\ldots,f_s$ より大きい
が成り立つときは拡張定理が証明された.

定理5(証明)

(9)が $f_1,\ldots,f_s$ に対して成り立たないときの拡張定理の証明

(9)が成り立つような新しい基底を求める.

f_2 を $f_2+x_1^N f_1$ で置き換える(N は正の整数).

$I=\left\langle f_1,f_2+x_1^N f_1,f_3,\ldots,f_s\right\rangle$ が成り立つ.

N が十分大きければ, $f_2+x_1^N f_1$ の x_1 に関する最高次の係数は g_1 で, これは c において消えないことがわかっている. 必要なら N を大きくして $f_2+x_1^N f_1$ の x_1 に関する次数が $f_3,\ldots,f_s$ より大きいと仮定する. このとき, 先の議論より

$f_1(x_1,c),f_2(x_1,c)+x_1^N f_1(x_1,c),f_3(x_1,c),\ldots,f_s(x_1,c)$ すべての共通根 c_1 がある. この c_1 はすべての $f_i(x_1,c)$ の共通根である.