第4章§3の途中から
イデアルの共通部分

担当:長谷川禎彦

Idealの交わり（Intersection）

定義 8 $k[x_1, \ldots, x_n]$ の 2 つのイデアル I と J の交わり $I \cap J$ は I と J の両方に属する多項式全体の集合である

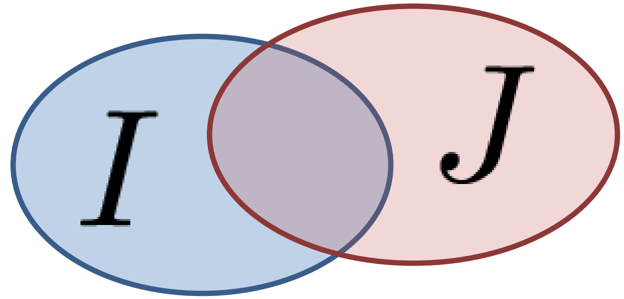
定義 1 部分集合 $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ がイデアル (ideal) であるとは，次を満たすときをいう．

(i) $0 \in I$.

(ii) $f, g \in I$ ならば $f + g \in I$.

(iii) $f \in I$ かつ $h \in k[x_1, \ldots, x_n]$ ならば $hf \in I$.

Idealの交わり（Intersection）



- 命題9

IとJが$k[x_1,..,x_n]$のイデアルならば $I\cap J$ もイデアルである.

証明　$0\in I$ と $0\in J$ より $0\in I\cap J$ であることに注意する．$f,g\in I\cap J$ ならば $f,g\in I$ なので $f+g\in I$ である．同様に $f+g\in J$ であるから $f+g\in I\cap J$ となる．最後に乗法で閉じていることを示す．$f\in I\cap J$ とし，h を $k[x_1,\ldots,x_n]$ の任意の多項式とする．$f\in I$ であり I はイデアルであるから，$h\cdot f\in I$ である．同様に $h\cdot f\in J$ であるから $h\cdot f\in I\cap J$ となる．　$\square$

Idealの交わり（Intersection）

$IJ \subset I \cap J$ が常に成り立つことに注意しておこう．なぜなら IJ の元は $f \in I$ と $g \in J$ の積 fg の形で書ける多項式の和であり，それは $f \in I$ なので I に属し，$g \in J$ なので J に属するからである．ところが，IJ は $I \cap J$ に一致しないこともある．たとえば $I = J = \langle x, y \rangle$ のとき，$IJ = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$ は $I \cap J = I = \langle x, y \rangle$ に真に含まれる.（実際 $x \in I \cap J$ であるが $x \notin IJ$ である.）

Idealの交わり（Intersection）

$$\mathbb{Q}[x,y]$$

$$I =< f >=< (x+y)^4(x^2+y)^2(x-5y) >$$
$$J =< g >=< (x+y)(x^2+y)^3(x+3y) >$$

$$I \cap J =< (x+y)^4(x^2+y)^3(x-5y)(x+3y) >$$

イデアルの交わりを解くための用意

IはIdeal of $k[x_1,..,x_n]$　　$f(t)\in k[t]$

$$fI=\{f\cdot h:h\in I\}=\{f(t)h(x):h(x)\in I\}$$

通常のイデアルの積とは意味が異なる

Iとfは異なる環に属する

多項式 $f\in k[t]$ が t のみの多項式であることを強調したい場合には，$f=f(t)$ と記そう．同様に，多項式 $h\in k[x_1,\ldots,x_n]$ が変数 $x_1,\ldots,x_n$ にしかよらないことを強調するのに $h=h(x)$ と記す．そしてまた，$k[x_1,\ldots,x_n,t]$ の多項式 g が変数 t と $x_1,\ldots,x_n$ の両方によっていることを強調したい場合，$g=g(x,t)$ と書く．この記号を用いると，$fI=f(t)I=\langle f(t)h(x):h(x)\in I\rangle$ である．したがって，たとえば $f(t)=t^2-t$，$I=\langle x,y\rangle$ のとき，$k[x,y,t]$ のイデアル $f(t)I$ は $(t^2-t)x$ や $(t^2-t)y$ を含む．さらに，イデアル $f(t)I$ がイデアルとして $(t^2-t)x$ と $(t^2-t)y$ で生成されていることを確認するのは難しくない．これは次の補題の例になっている．

補題10

(i) $I \subset k[x_1, .., x_n] \quad I = \langle p_1(x), .., p_r(x) \rangle$

$$\Downarrow$$

$$f(t)I \subset k[x_1, .., x_n, t]$$

$$f(t)I = \langle f(t)p_1(x), .., f(t)p_r(x) \rangle$$

(ii) $g(x, t) \in f(t)I \Longrightarrow g(x, a) \in I, \quad a \in k$

証明

$$g(x,t) \in f(t)I$$

$$g(x,t) = h(x,t)f(t)p(x) \quad h(x,t) \in k[x_1,..,x_n,t], p(x) \in k[x_1,..,x_n],$$

p(x)はイデアルIの元なので，その生成元を用いて

$$p(x) = \sum_{i=1}^{r} q_i(x)p_i(x), \quad q_i(x) \in k[x_1,..,x_n]$$

$$\Downarrow$$

$$g(x,t) = \sum_{i=1}^{r} h(x,t)q_i(x)f(t)p_i(x)$$

$$\Downarrow$$

$$g(x,t) \in \langle f(t)p_1(x),..,f(t)p_r(x)\rangle$$

定理11

I, J を $k[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアルとする．このとき

$$I \cap J = (tI + (1-t)J) \cap k[x_1, .., x_n]$$

$tI + (1-t)J$ はk[x1,..,xn,t]のイデアルであることに注意．なぜなら，tIも(1-t)Jもイデアルであり，さらにその和もそうであるから.

例によって両側向きの包含関係を示すことで等式を示そう．

$$I \cap J \Rightarrow (tI + (1-t)J) \cap k[x_1, .., x_n]$$

$f \in I \cap J$

$f \in J$

$f \in I$ なので $t \cdot f \in tI$

$(1-t) \cdot f \in (1-t)J$

$$f = t \cdot f + (1-t) \cdot f \in tI + (1-t)J$$

$I, J \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ なので $f \in (tI + (1-t)J) \cap k[x_1, \ldots, x_n]$

$$I \cap J \Leftarrow (tI + (1-t)J) \cap k[x_1, .., x_n]$$

$f \in (tI + (1-t)J) \cap k[x_1, \ldots, x_n]$ とする

$g(x,t) \in tI$ と $h(x,t) \in (1-t)J$ を用いて $f(x) = g(x,t) + h(x,t)$

tI は t の倍元なので，$g(x,0) = 0$

$f(x) = h(x,0)$ となり，補題 10 より $f(x) \in J$ である

同様に $h(x,1) = 0$ である．よって $f(x) = g(x,1)$ であり $f(x) \in I$

$f \in I \cap J$

$I \cap J \supset (tI + (1-t)J) \cap k[x_1, \ldots, x_n]$

Ideal intersection algorithm

$$I = \langle f_1, .., f_r \rangle \qquad J = \langle g_1, .., g_s \rangle$$

$$\langle t f_1, .., t f_r, (1-t) g_1, .., (1-t) g_s \rangle \subset k[x_1, .., x_n, t]$$

Groebner basis $\Downarrow$ $\mathrm{lex}(t, x_1, .., x_n)$

$$I \cap J$$

消去理論を参照

例

この手順の簡単な例として，$\mathbb{Q}[x,y]$ のイデアル $I=\langle x^2y\rangle$ と $J=\langle xy^2\rangle$ の交わりを計算してみよう．まず $\mathbb{Q}[t,x,y]$ のイデアル

$$tI+(1-t)J=\langle tx^2y,(1-t)xy^2\rangle=\langle tx^2y,txy^2-xy^2\rangle$$

を考える．生成元の S 多項式を計算すると $tx^2y^2-(tx^2y^2-x^2y^2)=x^2y^2$ を得る．$\{tx^2y,txy^2-xy^2,x^2y^2\}$ が，$t>x>y$ となるような lex 順序に関する $tI+(1-t)J$ のグレブナ基底であることは容易に確かめられる．消去定理より $\{x^2y^2\}$ は $(tI+(1-t)J)\cap\mathbb{Q}[x,y]$ の（グレブナ）基底である．したがって

$$I\cap J=\langle x^2y^2\rangle$$

定義12 最小公倍元

$$f, g, h \in k[x_1, .., x_n]$$

i. fはhを割り切り，gはhを割り切る
ii. hはfとgの両方を割り切るような任意の多項式を割り切る

$$h = \mathrm{LCM}(f, g)$$

Example $$\mathrm{LCM}(x^2y, xy^2) = x^2y^2$$

$$\mathrm{LCM}((x+y)^4(x^2+y)^2(x-5y), (x+y)(x^2+y)^3(x+3y))$$
$$= (x+y)^4(x^2+y)^3(x-5y)(x+3y)$$

最小公倍元

$$f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$$

$$f = f_1^{a_1} \cdots f_r^{a_r},\ g = g_1^{b_1} \cdots g_s^{b_s}$$

$1 \leq l \leq \min(r, s)$ となるような l に対して

$1 \leq i \leq l$ なら f_i が g_i の（ゼロでない）定数倍

$i, j > l$ なら f_i は g_j の定数倍ではないようにできる

$$\mathrm{LCM}(f, g) = f_1^{\max(a_1, b_1)} \cdots f_l^{\max(a_l, b_l)} \cdot g_{l+1}^{b_{l+1}} \cdots g_s^{b_s} \cdot f_{l+1}^{a_{l+1}} \cdots f_r^{a_r}$$

命題13

命題 13　(i) 2 つの主イデアル $I, J \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ の交わり $I \cap J$ は主イデアルである．

(ii) $I = \langle f \rangle$, $J = \langle g \rangle$, $I \cap J = \langle h \rangle$ とすれば，

$$h = \mathrm{LCM}(f, g)$$

が成り立つ．

最小公倍元を計算するアルゴリズム

$f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ の最小公倍元を計算する

⇩

交わり $\langle f \rangle \cap \langle g \rangle$ を計算する

⇩

この交わりは主イデアルでありその生成元は f と g の最小公倍元である

命題14

命題 14 $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ とする．このとき

$$\mathrm{LCM}(f,g) \cdot \mathrm{GCD}(f,g) = fg$$

である．

何故なら

$$\mathrm{LCM}(f,g) = f_1^{\max(a_1,b_1)} \cdots f_l^{\max(a_l,b_l)} \cdot g_{l+1}^{b_{l+1}} \cdots g_s^{b_s} \cdot f_{l+1}^{a_{l+1}} \cdots f_r^{a_r}$$

$$\mathrm{GCD}(f,g) = f_1^{\min(a_1,b_1)} \cdots f_l^{\min(a_l,b_l)}$$

$$\frac{f_1^{a_1+b_1}}{f_1^{\max(a_1,b_1)}} = f_1^{\min(a_1,b_1)}$$

交わり操作と多様体の関係

定理 15 I と J を $k[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアルとすると，$\mathbf{V}(I \cap J) = \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$ である．

証明 $x \in \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$ とすると $x \in \mathbf{V}(I)$ または $x \in \mathbf{V}(J)$ である．$x \in \mathbf{V}(I)$ ならば $I \cap J \subset I$ なので $x \in \mathbf{V}(I \cap J)$ である．$x \in \mathbf{V}(J)$ ならば $I \cap J \subset J$ なので $x \in \mathbf{V}(I \cap J)$ である．したがって $\mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J) \subset \mathbf{V}(I \cap J)$ となる．

他方，$IJ \subset I \cap J$ なので $\mathbf{V}(I \cap J) \subset \mathbf{V}(IJ)$ である．ところが定理 7 より $\mathbf{V}(IJ) = \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$ である．したがって逆向きの包含関係も成り立つ．□

命題16

命題 16 I, J を任意のイデアルとする．このとき

$$\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$$

である．

証明　$f \in \sqrt{I \cap J}$ ならば，$f^m \in I \cap J$ となるような整数 $m > 0$ が存在する．$f^m \in I$ なので $f \in \sqrt{I}$ であり，同様に $f \in \sqrt{J}$ である．したがって $\sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ となる．

逆向きの包含関係を示そう．$f \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ とする．このとき，$f^m \in I$, $f^p \in J$ となるような整数 $m, p > 0$ が存在する．$f^{m+p} = f^m f^p \in I \cap J$ なので $f \in \sqrt{I \cap J}$ である．