特異点と包絡線
曲線の特異点
曲線の族の包絡線

1 特異点

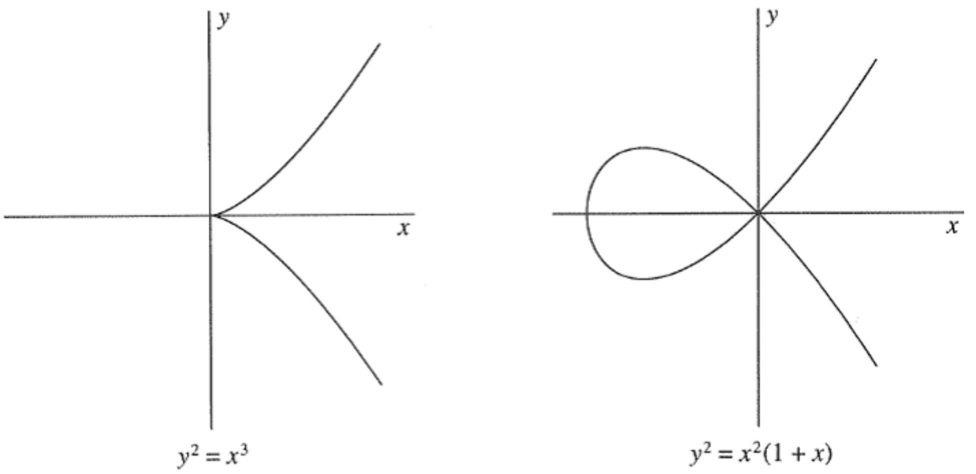

図 4.1 曲線 $y^2 = x^3$ と $y^2 = x^2(1+x)$

特異点とは、接線が存在しえないような点のことである。
点 $(a,b) \in V(f)$ を通る直線 L:

$$x = a + ct, \tag{1}$$
$$y = b + dt \tag{2}$$

$V(f)$ に接するようにさせるには？
例：直線 L

$$x = 1 + ct, \tag{3}$$
$$y = 1 + dt \tag{4}$$

$(1,1)$ を通る傾き 2 の直線。$d = 2c$ に対応する。

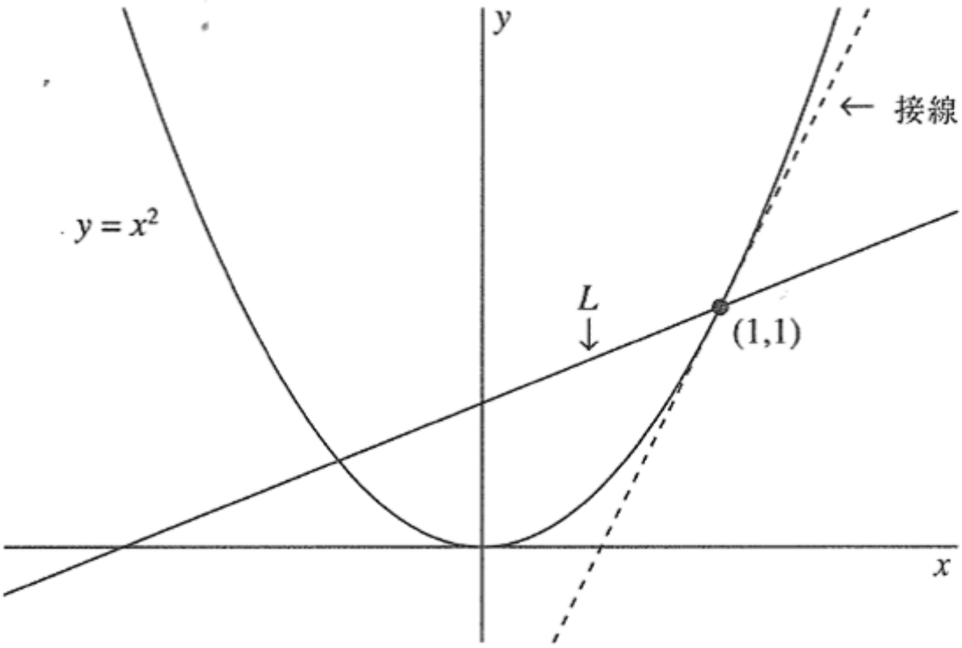

図 4.2　接線

代数的な方法で、この直線を求めるために、直線と放物線がどのようにして交わるのかを記述する多項式を調べる。(3), (4) を $y - x^2 = 0$ の左辺に代入して、

(5) $$g(t) = 1 + dt - (1 + ct)^2 = -c^2t^2 + (d - 2c)t = t(-c^2t + d - 2c).$$

$d = 2c$ であるならば、g は重複度 2 の根を持つ。重根を探すことによって、直線が放物線にいつ接するかがわかる。

定義 1 **k を正の整数とする．$(a, b) \in \mathbf{V}(f)$ とし，L を (a, b) を通る直線とする．このとき，L は点 (a, b) において重複度 k で $\mathbf{V}(f)$ と交わる[8]とは次を意味する：L は (1) によってパラメータ表示され，$t = 0$ は多項式の方程式 $g(t) = f(a + ct, b + dt)$ の重複度 k の根である．**

接線を微積分を使わないで見つけ出すために、重複度の概念を使う。f の勾配ベクトル。

(6) $$\nabla f = (\frac{\partial}{\partial x}f, \frac{\partial}{\partial y}f)$$

命題 2 $f \in k[x,y]$ および $(a,b) \in \mathbf{V}(f)$ とおく．

(i) もし $\nabla f(a,b) \neq (0,0)$ であるならば，(a,b) を通る直線で，$\mathbf{V}(f)$ と重複度 2 以上で交わるものがただ 1 つ存在する．

(ii) もし $\nabla f(a,b) = (0,0)$ であるならば，(a,b) を通るすべての直線は，$\mathbf{V}(f)$ と重複度 2 以上で交わる．

証明　L を (a,b) を通る直線で (1) でパラメータ表示されたものとし，$g(t) = f(a+ct, b+dt)$ とおく．$(a,b) \in \mathbf{V}(f)$ であるから，$t=0$ は g の根である．次の事実は演習問題で証明することにする．

(4) $$t=0 \text{ は } g \text{ の根で重複度は 2 以上} \iff g'(0) = 0.$$

合成関数の微分公式（連鎖律）を使って計算すると

$$g'(t) = \frac{\partial}{\partial x} f(a+ct, b+dt) \cdot c + \frac{\partial}{\partial y} f(a+ct, b+dt) \cdot d$$

となることがわかり，したがって

$$g'(0) = \frac{\partial}{\partial x} f(a,b) \cdot c + \frac{\partial}{\partial y} f(a,b) \cdot d$$

である．

もし $\nabla f(a,b) = (0,0)$ であるならば，上記の方程式は $g'(0)$ がいつでも 0 に等しいことを示している．(4) によって，L は $\mathbf{V}(f)$ に (a,b) において常

に重複度 2 以上で交わることが従う．これで定理の (ii) が証明された．定理の (i) に戻って，$\nabla f(a,b) \neq (0,0)$ を仮定する．$g'(0)=0$ と

$$\frac{\partial}{\partial x} f(a,b)\cdot c + \frac{\partial}{\partial y} f(a,b)\cdot d = 0 \tag{5}$$

が同値であることはわかっている．これは c と d を未知数としたときの線型方程式である．係数 $\frac{\partial}{\partial x} f(a,b)$ と $\frac{\partial}{\partial y} f(a,b)$ は同時にゼロとはならないから，解の次元は 1 次元である．したがって，$(c_0,d_0) \neq (0,0)$ があって，(c,d) が上記の方程式を満たすのは，適当な $\lambda \in k$ に対して $(c,d) = \lambda(c_0,d_0)$ となるときに限られる．これより $g'(0)=0$ を与える (c,d) すべてが，同じ直線 L をパラメータ表示することが従う．これは，$\mathbf{V}(f)$ が (a,b) で重複度 2 以上の交わりを持つ直線が 1 つだけ存在することを示している．これで命題 2 が示された． □

定義 3 $f \in k[x,y]$ かつ $(a,b) \in \mathbf{V}(f)$ とする．

(i) もし，$\nabla f(a,b) \neq (0,0)$ であるならば，$\mathbf{V}(f)$ の (a,b) における**接線** (tangent line) とは，(a,b) を通って $\mathbf{V}(f)$ と重複度 2 以上で交わる唯一の直線である．(a,b) を $\mathbf{V}(f)$ の**非特異点** (nonsingular point) という．

(ii) もし $\nabla f(a,b) = (0,0)$ ならば，(a,b) は $\mathbf{V}(f)$ の**特異点** (singular point) と呼ばれる．

(5) より、$\nabla f(a,b)\cdot(c,d)=0$。勾配 $\nabla f(a,b)$ は、(c,d) に垂直。微積分の定理の代数的な証明になっている。

$y^2=x^2(1+x)$ の場合。$(0,0)$ が $V(f)$ の唯一の特異点。

$$f=y^2-x^2-x^3=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f=-2x-3x^2=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f=2y=0$$

2　包絡線

例：

$$(x-t)^2+(y-t^2)^2=4 \tag{7}$$

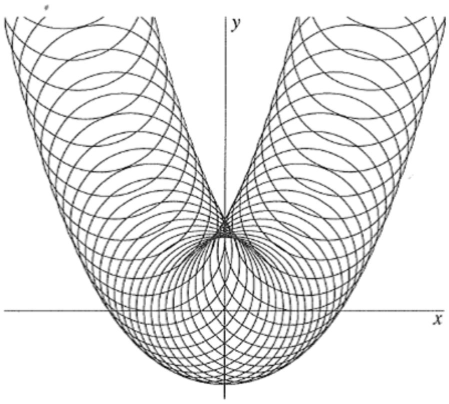

図 4.3 平面内の円の族

定義 4 与えられた多項式 $F \in \mathbb{R}[x,y,t]$ に対して，実数 $t \in \mathbb{R}$ を固定する．このとき，$\mathbb{R}^2$ において $F(x,y,t)=0$ で定義される多様体を $\mathbf{V}(F_t)$ で表す．また F によって定まる**曲線の族** (family of curves) とは，t が $\mathbb{R}$ を動いたときにできる多様体 $\mathbf{V}(F_t)$ 全体の集まりのことである．

$$F(x,y,t)=(x-t)^2-y+t=0 \tag{8}$$

包絡線は、 $y=x-1/4$。

包絡線は、次のように完全に代数的な方法で特徴づけることができる。

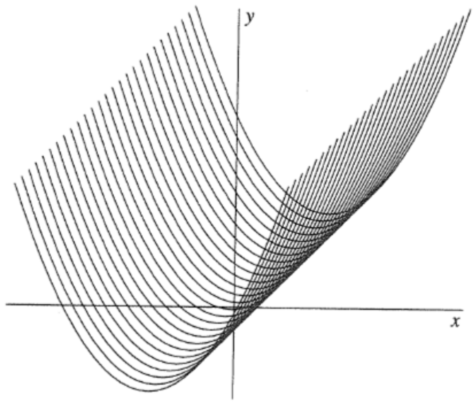

図 4.4 平面内の放物線の族

定義 2.1. $\mathbb{R}^2$ の曲線の族 $V(F_t)$ に対して、その包絡線は、ある $t \in \mathbb{R}$ に対して
$F(x, y, t) = 0$,
$\frac{\partial}{\partial t} F(x, y, t) = 0$
となるようなすべての点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ で構成される。

曲線の族 $V(F_t)$ に対して、包絡線は曲線 C であって、C 上の各点において C が曲線族の中の曲線 $V(F_t)$ の一つに接するという性質をもつものと考える。その曲線 C が

$$x = f(t), \tag{9}$$
$$y = g(t) \tag{10}$$

でパラメタ付けられていると仮定する。時刻 t において、点 $(f(t), g(t))$ は曲線 $V(F_t)$ 上にあると仮定する。これは、曲線 C が曲線族にあるすべての曲線と交わることを保証している。代数的に言えば、
$F(f(t), g(t), t) = 0$ がすべての $t \in \mathbb{R}$ に対して成立する
ことを意味している。

微積分の結果より、C の接ベクトルは $(f'(t), g'(t))$。勾配 ∇F は $V(F_t)$ に垂直。したがって、C が $V(F_t)$ に接するためには、$\nabla F \cdot (f'(t), g'(t)) = 0$。

$$\frac{\partial}{\partial x} F(f(t), g(t), t) \cdot f'(t) + \frac{\partial}{\partial y} F(f(t), g(t), t) \cdot g'(t) = 0. \tag{11}$$

連鎖律を使って、

$$\frac{\partial}{\partial x} F(f(t), g(t), t) \cdot f'(t) + \frac{\partial}{\partial y} F(f(t), g(t), t) \cdot g'(t) + \frac{\partial}{\partial t} F(f(t), g(t), t) = 0 \tag{12}$$

(11) を引いて、

$$\frac{\partial}{\partial t}F(f(t), g(t), t) = 0. \tag{13}$$

定義 5 で記述された性質を持つことが分かった。

(6) においてどうなるのかを見てみよう．ここで，$F = (x-t)^2+(y-t^2)^2-4$ であり，包絡線は次の連立方程式で決定される．

$$\begin{aligned} F &= (x-t)^2 + (y-t^2)^2 - 4 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}F &= -2(x-t) - 4t(y-t^2) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

変数順序 $t > x > y$ による辞書式順序によって，グレブナ基底を計算すると次のようになる．

$$\begin{aligned} g_1 =& -1156 + 688x^2 - 191x^4 + 16x^6 + 544y + 30x^2y - 40x^4y \\ & + 225y^2 - 96x^2y^2 + 16x^4y^2 - 136y^3 - 32x^2y^3 + 16y^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2 =& (7327 - 1928y - 768y^2 - 896y^3 + 256y^4)t + 6929x - 2946x^3 \\ & + 224x^5 + 2922xy - 1480x^3y + 128x^5y - 792xy^2 - 224x^3y^2 \\ & - 544xy^3 + 128x^3y^3 - 384xy^4, \\ g_3 =& (431x - 12xy - 48xy^2 - 64xy^3)t + 952 - 159x^2 - 16x^4 + 320y \\ & - 214x^2y + 32x^4y - 366y^2 - 32x^2y^2 - 80y^3 + 32x^2y^3 + 32y^4, \\ g_4 =& (697 - 288x^2 + 108y - 336y^2 + 64y^3)t + 23x - 174x^3 \\ & + 32x^5 + 322xy - 112x^3y + 32xy^2 + 32x^3y^2 - 96xy^3, \\ g_5 =& 135t^2 + (26x + 40xy + 32xy^2)t - 128 + 111x^2 \\ & - 16x^4 + 64y + 8x^2y + 32y^2 - 16x^2y^2 - 16y^3. \end{aligned}$$

グレブナ基底では、 $\mathbb{R}[x, y]$ に係数を持つ t の多項式として各元を表している。消去定理によって、 g_1 は t を消去した 1 次のイデアルを生成する。包絡線は、 $g_1 = 0$ 上にある。

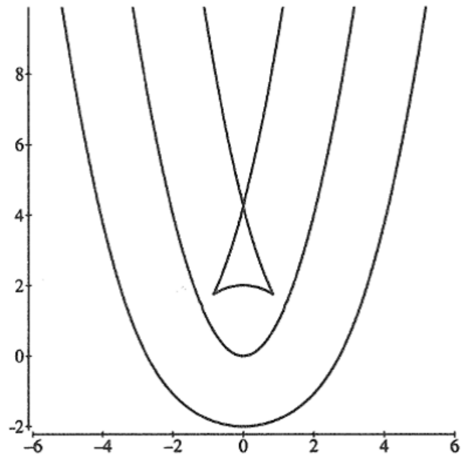

図 4.5 放物線と包絡線

- $\mathbf{V}(g_1)$ のすべての点は包絡線上にあるか？ これは (11) の部分解 (x, y) が (x, y, t) まで延長できるかどうかを問うのと同じことである.
- 包絡線上の点に対して，曲線族の中のいくつの曲線がこの点において包絡線に接しているだろうか？ これは (x, y) が (x, y, t) まで延長するような t はいくつあるかを問うのと同じことである.

g_5 の t に関する最高次の項の係数は 135. 拡張定理は、複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考えているという条件のもとに、すべての解が拡張できることを保証している。すなわち、t は存在するが、複素数かもしれない。

$g_5 = 0$ は、t の 2 次方程式であるから、与えられた (x, y) に対して、拡張の仕方は高々 2 通り。したがって包絡線上の点は曲線族の高々 2 つの円に接しているだけである。

他の多項式は、t の 1 次の項しか含んでいない。したがって、

(14) $$g_i = A_i(x, y)t + B_i(x, y),\ i = 2, 3, 4.$$

A_i が (x, y) においてゼロになっていなければ、

(15) $$t = -\frac{B_i(x, y)}{A_i(x, y)}.$$

x, y が実であれば t は、実である。また、$A_i(x, y) \neq 0$ であれば、t は一意に決まる。したがって、包絡線上の点で $V(A_2, A_3, A_4)$ 上にないものは、曲線族の中のただ一つの円に接する。

最後に残ったことは，A_2, A_3 および A_4 が同時にゼロになるときどうなるかを理解することである．これらの多項式は複雑に見えるが，§1 の手法を使って $A_2 = A_3 = A_4 = 0$ の実数解は

$$(x, y) = (0, 17/4)\ ,\ (\pm 0.936845, 1.63988) \tag{12}$$

であることを示すことができる．$\mathbf{V}(g_1)$ の図を見直すと，これらは $\mathbf{V}(g_1)$ の特異点として現れている．読者はこれらの点において，2 個の円が接していることがわかるだろうか？ この節の「特異点」の部分での議論から，我々は $\mathbf{V}(g_1)$ の特異点は方程式 $g_1 = \frac{\partial}{\partial x} g_1 = \frac{\partial}{\partial y} g_1 = 0$ で決定されることを知っている．したがって，特異点が (12) と一致するとは

$$\mathbf{V}(A_2, A_3, A_4) = \mathbf{V}\left(g_1, \frac{\partial}{\partial x} g_1, \frac{\partial}{\partial y} g_1\right) \tag{13}$$

であることを意味する．これを証明するために

$$\begin{aligned} &g_1,\ \frac{\partial}{\partial x} g_1,\ \frac{\partial}{\partial y} g_1 \in \langle A_2, A_3, A_4 \rangle, \\ &A_2^2,\ A_3^2,\ A_4^2 \in \left\langle g_1, \frac{\partial}{\partial x} g_1, \frac{\partial}{\partial y} g_1 \right\rangle \end{aligned} \tag{14}$$

を示そう．(14) の証明は第 2 章で論じたイデアル所属アルゴリズムのそのままの応用である．まず最初の行に対しては $\langle A_2, A_3, A_4 \rangle$ のグレブナ基底を計算し，次に $g_1, \frac{\partial}{\partial x} g_1, \frac{\partial}{\partial y} g_1$ の各々にイデアル所属問題のアルゴリズムを適用する（第 2 章の §8 を参照）．(14) の 2 行目に対しても同様の扱いをする．詳細は演習問題として残しておく．

(13) は (14) から直ちに従うので，$\mathbf{V}(g_1)$ の非特異点は (6) の包絡線の上にあり，そのような点の上では包絡線は曲線族の中のただ 1 つの円にだけ接することが証明された．$\mathbf{V}(g_1)$ の特異点は，そこでは 2 つの円が接するから，包絡線のもっとも興味深い点であることにも注意する．このような観察からわかるように，特異点は必ずしも悪い点というわけではない．特異点は，そこで何か通常とは違ったことが起こっていることを知らせてくれるので有益である．代数幾何の重要な部分が特異点の研究に向けられている．