第3章　消去理論
§2　消去の幾何

担当　乳井昌道

・§2では、§1で証明した定理の幾何学的な解釈を与える.

・変数の消去は多様体をより低次元の部分空間上に射影することに対応する.

アフィン多様体の射影の定義

アフィン多様体 $V = V(f_1, \ldots, f_s) \subset C^n$ を与える.
最初の l 個の変数 $x_1, \ldots, x_l$ を消去するために,
射影写像 $\pi_l : C^n \to C^{n-l}$ を考える.
これは $(a_1, \ldots, a_n)$ を $(a_{l+1}, \ldots, a_n)$ に写す.
π_l で $V \subset C^n$ を射影するとき, $\pi_l(V) \subset C^{n-l}$ を得る.

$\pi_l(V)$ と l 次の消去イデアルを次のように関連づけることができる.

補題1

$I_l = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \cap C[x_{l+1}, \ldots, x_n]$ を l 次の消去イデアルとする.このとき, C^{n-l} において

$$\pi_l(V) \subset V(I_l)$$

が成り立つ.

補題1(証明)

多項式 $f \in I_l$ を固定する. もし $(a_1,\dots,a_n) \in V$ であるならば, $f \in \langle f_1,\dots,f_s \rangle$ であるから, f は点 $(a_1,\dots,a_n)$ で消える. しかし, f は変数 $x_{l+1},\dots,x_n$ だけに依存するから,

$$f(a_{l+1},\dots,a_n) = f\left(\pi_l(a_1,\dots,a_n)\right) = 0$$

と書くことができる.

これは, f が $\pi_l(V)$ のすべての点で消えることを示している.

§1のように$V(I_l)$の点を部分解と呼ぶ.
補題1より, $\pi_l(V)$は次のように書ける.

$$\pi_l(V)=\left\{(a_{l+1},\ldots,a_n)\in V(I_l):\ \begin{array}{l}(a_1,\ldots,a_l,a_{l+1},\ldots,a_n)\in V \\ \text{となる}\, a_1,\ldots,a_l\in C\ \text{が} \\ \text{が存在する.}\end{array}\right\}$$

したがって, $\pi_l(V)$ は, 完全解まで拡張できる部分解全体にちょうど一致する.

例

§1の連立方程式(4)によって定義される多様体 Vを考える.

$$xy = 1$$
$$xz = 1$$

ここで, 解と部分解を同時に表示する図2.1を得る.

$V(I_1)$ は yz 平面内の直線 $y = z$ であり,

また $\pi_1(V) = \{(a,a) \in C^2 : a \neq 0\}$ である.

$\pi_1(V)$ はアフィン多様体でない. (点(0,0)が抜けている)

※ $V(I_1)$ は点(0,0)を含む.

定理2(幾何学的拡張定理)

拡張定理は幾何学的に次のように述べることができる.

多様体 $V = V\left(f_1,\ldots,f_s\right) \subset C^n$ に対して, g_i を§1の拡張定理で与えた関数とする. I_1 を $\left\langle f_1,\ldots,f_s \right\rangle$ の1次の消去イデアルとする. このとき, C^{n-l} における次の等式が成り立つ.

$$V\left(I_1\right) = \pi_1\left(V\right) \cup \left(V\left(g_1,\ldots,g_s\right) \cap V\left(I_1\right)\right)$$

ここで, $\pi_1 : C^n \to C^{n-1}$ は, x_1 を除いた $n-1$ 変数への射影である.

定理2の意味

$V(g_1,\ldots,g_s)$の一部として $V(I_1)$から欠落する可能性のある部分を除けば, $\pi_1(V)$ がアフィン多様体 $V(I_1)$ 全体を満たすことを述べている.

例 $xy=1, xz=1$ の場合

$$\pi_1(V)=\left\{(a,a)\in C^2 : a\neq 0\right\}$$ (点(0,0)を除く.)

$$V(g_1,g_2)=V(y,z)$$

$$V(g_1,g_2)\cap V(I_1)=(0,0)$$

$V(g_1,\ldots,g_s)$が不自然に大きいとき

$$(y-z)x^2+xy=1,(y-z)x^2+xz=1$$

$xy=1, xz=1$ と同じイデアルを生成する.

$g_1=g_2=y-z$ は消去イデアル I_1 を生成するから,

定理2は $\pi_1(V)$ の大きさについて何も教えてくれない.

定理3(閉包定理)

$V=V\left(f_1,\ldots,f_s\right)\subset C^n$とおき, I_lを$\left\langle f_1,\ldots,f_s\right\rangle$の l 次の消去イデアルとする. このとき次が成り立つ.

(ｉ) $V\left(I_l\right)$は$\pi_l\left(V\right)\subset C^{n-l}$を含む最小のアファィン多様体である.

(ii) $V\neq\emptyset$であるとき, $V\left(I_l\right)-W\subset\pi_l\left(V\right)$となるアファィン多様体 $W\subseteq V\left(I_l\right)\left(W\neq V\left(I_l\right)\right)$がある.

定理3(証明)

$V(I_l)$ が最小の意味

・ $\pi_l(V) \subset V(I_l)$

・もし Z が C^{n-l} における $\pi_l(V)$ を含む何か別のアフィン多様体であるとすれば, $V(I_l) \subset Z$ である.

(ｉ)の証明は第4章

定理3(証明)

$I=1$ の場合に限って(ii)を証明する.($l>1$ の場合の証明は第5章の§6)

定理2から,

$$V(I_1)=\pi_1(V)\cup\left(V(g_1,\ldots,g_s)\cap V(I_1)\right)$$

$W=V(g_1,\ldots,g_s)\cap V(I_1)$ とすると, 第1章§2の補題2より W はアフィン多様体である.

$V(I_1)-W\subset\pi_1(V)$ が得られ, したがって, $W\neq V(I_1)$ であるならば証明は終わる.

定理3(証明)

$(y-z)x^2+xy=1,(y-z)x^2+xz=1$のように$W=V(I_1)$となるとき
この場合には, Wがより小さくなるように, Vを定義する連立方程式を取り換える必要がある. そのために次の事実が鍵になる.
もし, $W=V(I_1)$ならば$V=V(f_1,\ldots,f_s,g_1,\ldots,g_s)$
【証明】
方程式を加えているので, $V(f_1,\ldots,f_s,g_1,\ldots,g_s)\subset V(f_1,\ldots,f_s)=V$
は明らか. 逆を証明するために$(a_1,\ldots,a_n)\in V$とする. 各々のf_i
はこの点で消える. また$(a_2,\ldots,a_n)\in \pi_1(V)\subset V(I_1)=W$であるから,
各g_iはここで消える. したがって,

$(a_1,\ldots,a_n)\in V(f_1,\ldots,f_s,g_1,\ldots,g_s)$となる.

定理3(証明)

$I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ をもとのイデアルとする. また, $\tilde{I}$ を, 生成元 $g_1, \ldots, g_s$ を付け加えたイデアル $\langle f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_s \rangle$とする.

I と $\tilde{I}$ は, 仮にそれらが同じ多様体 V を定義するとしても異なるかもしれず, 対応する消去イデアル I_1 と $\tilde{I}_1$ は異なるかもしれない.

しかし, $V(I_1)$ と $V(\tilde{I}_1)$ はともに(定理の(ｉ)より) $\pi_1(V)$ を含む最小の多様体であるから, $V(I_1) = V(\tilde{I}_1)$ が従う.

定理3(証明)

次は, $\tilde{I}$ のよりよい基底を求める.

g_i は次の式から定義された.

$$f_i = g_i\left(x_2,\ldots,x_n\right)x_1^{N_i} + (x_1 \text{ の次数が } < N_i \text{ である項}).$$

ここで, $N_i > 0$ かつ $g_i \in C\left[x_2,\ldots,x_n\right]$はゼロではない. ここで,

$$\tilde{f}_i = f_i - g_i x_1^{N_i}$$

とおく. 各 *i* に対して, $\tilde{f}_i$ はゼロであるか, x_1に関する次数が f_i よりも真に小さいかどちらかである.

$$\tilde{I} = \left\langle \tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_s, g_1,\ldots,g_s \right\rangle$$

を示すことは演習問題とする.

定理3(証明)

定理2を $V=V\left(\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_s,g_1,\ldots,g_s\right)$ に適用する.

生成元先頭項が異なっていることをに注意すると, 次の異なった分解が得られる.

$$V\left(I_1\right)=V\left(\tilde{I}_1\right)=\pi_1\left(V\right)\cup\tilde{W}$$

ここで, $\tilde{W}$ は $\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_s,g_1,\ldots,g_s$ の先頭項がゼロになる部分解よりなる.

定理3(証明)

証明を進める前に: $\tilde{W}$ が W より小さくなりうる例

$I = \left\langle \left(y-z\right)x^2 + xy - 1, \left(y-z\right)x^2 + xz - 1 \right\rangle$ とおく.
$I_1 = \left\langle y-z \right\rangle$ かつ $g_1 = g_2 - y - z$ であるので, この場合は $W = V\left(I_1\right)$ となる. そこで, 以前述べたプロセスから次のイデアルが出てくる.

$$\tilde{I} = \left\langle \left(y-z\right)x^2 + xy - 1, \left(y-z\right)x^2 + xz - 1, y-z \right\rangle = \left\langle xy-1, xz-1, y-z \right\rangle$$

$\tilde{I}$ に定理2を適用して, $\tilde{W}$ は y と z がゼロになる部分解より
なることがわかる. すなわち, $\tilde{W} = \left\{\left(0,0\right)\right\}$ で, これは $W = V\left(I_1\right)$ より
真に小さい.

定理3(証明)

一般の場合に $\tilde{W}$ が真に小さいことを保証するものは何もない.
だから, あいかわらず $\tilde{W} = V(I_1)$ となることは起こりうる.
このような場合は上記のプロセスを繰り返せばよい.
繰り返しているうちに, $V(I_1)$ よりも真に小さくなることがどこかで起これば, それによって証明は終わる.

定理3(証明)

常に同じ$V(I_1)$が得られる場合

上記のプロセスを繰り返す度に, 生成元の x_1 の次数は落ちていく(あるいはゼロのままである). したがって, 最終的には全ての生成元の x_1 の次数は0になる.これは, V が $C[x_2,\ldots,x_n]$ の多項式の零点によって定義できることを意味する.したがって,$(a_2,\ldots,a_n)$ が部分解であるならば, すべての $a_1 \in C$ に対して $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in V$となる. なぜなら, x_1 は V の定義多項式に現れないからである. したがって, すべての部分解は拡張でき, これによって$\pi_1(V) = V(I_1)$ が証明される. この場合は, $W = \emptyset$ であるときに定理の(ii)が満たされていることがわかり(ここで $V = \emptyset$ である仮定を使う), 定理が証明された.

$\pi_l(V)$ の正確な構造

アフィン多様体 $Z_i \subset W_i \subset C^{n-l}$ が各 $1 \le i \le m$ に対して存在して,

$$\pi_l(V) = \bigcup_{i=1}^{m} (W_i - Z_i)$$

を満たす. 一般にこのような形の集合は構成可能であるという.

※証明は第5章の§6

系4(§1の幾何学的なバージョン)

$V = V(f_1,\ldots,f_s) \subset C^n$とおき, ある i に対して, f_i が

$$f_i = cx_1^N + \text{ (} x_1 \text{ の次数が} < N \text{ である項)}$$

という形になっているとする. ここで, $c \in C$ はゼロではなく, $N > 0$ である. もし, I_1 が$\langle f_1,\ldots,f_s \rangle$ の1次の消去イデアルであるとすると, C^{n-1} において,

$$\pi_1(V) = V(I_1)$$

となる. ここで, π_1 は x_1 を除く $n-1$ 個の変数への射影である.