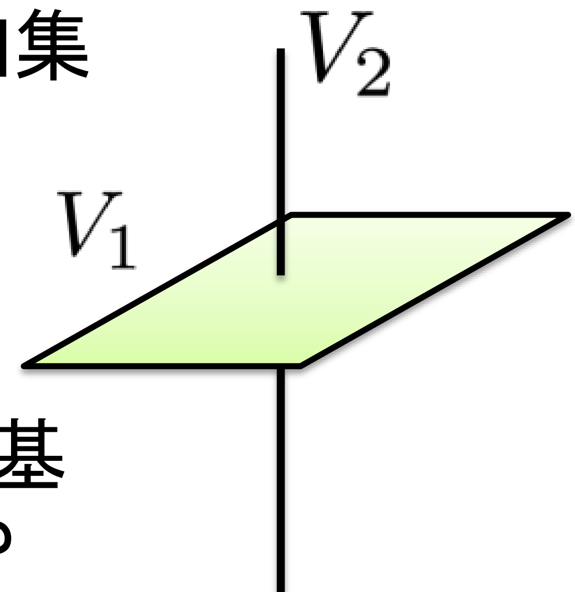
第4章 §5
既約多様体と素イデアル

担当:長谷川禎彦

既約多様体

- 多様体$V(xz,yz)$は直線と平面の和集合である.

$$\underbrace{V(x,y)}_{\text{線}} \cup \underbrace{V(z)}_{\text{xy平面}}$$



- 直感的に「直線」や「平面」はより基本的であると見なせる. 「直線」や「平面」はある意味「既約」で分解不能のように直感的に思える. つまりこれ以上分解できない（多様体の和集合で書けない）.

定義1

アフィン多様体Vが既約であるとは，*V*をアフィン多様体*V*1，*V*2を用いて $V = V_1 \cup V_2$ と表したとき,$V_1 = V$ または $V_2 = V$ が成り立つとき.

既約多様体

- 既約の判定は簡単ではない
  - $V(xz, yz)$は既約ではない
  - 直線や平面は既約になるはず
- もし，既約多様体にイデアルを特徴つけることが出来るならば，既約かどうかの判定が出来るであろう.

定義2

- イデアル $I \subset k[x_1, .., x_n]$ が素イデアルであるとは, $f, g \in k[x_1, .., x_n]$ が $fg \in I$ を満たすなら, 常に $f \in I$ または $g \in I$ が成り立つことを言う.

素数を一般化した概念

命題３：素イデアルと既約多様体

- $V \subset k^n$ をアフィン多様体とする．このとき*V*が既約であることと，**I**(*V*)が素イデアルであることは同値である．

命題3の証明

Vが既約であると仮定し, $fg \in \mathbf{I}(V)$とする.
$V_1 = V \cap \mathbf{V}(f)$ $V_2 = V \cap \mathbf{V}(g)$ とおく. アフィン多様体の交わりは多様体なので, これらはアフィン多様体である.
$fg \in \mathbf{I}(V)$ であるから, $V = V_1 \cup V_2$ が容易に従う（次ページ補足参照）.

「容易に従う」の中身

$$fg \in \mathbf{I}(V)$$

⇩

fgはV上で消える

⇩

$$f(x) = 0 \; or \; g(x) = 0 \; x \in V$$

⇩

$$V(f) \cup V(g) \supset V$$

⇩

$$V \cap (V(f) \cup V(g)) = V$$

⇩

$$(V \cap V(f)) \cup (V \cap V(g)) = V$$

⇩

$$V_1 \cup V_2 = V$$

Vは既約なので，$V = V_1$または$V = V_2$が成立する．
前者が成り立つとすると，$V = V_1 = V \cap \mathbf{V}(f)$
これはfがVで消えることを意味し，$f \in \mathbf{I}(V)$
従って$\mathbf{I}(V)$は素イデアルになる．

逆に$\mathbf{I}(V)$が素イデアルであると仮定し，Vが既約であることを証明する．$V = V_1 \cup V_2$ とし$V \neq V_1$と仮定する．
$V_2 \subset V$より$\mathbf{I}(V) \subset \mathbf{I}(V_2)$．次に逆向きの包含関係を示す．

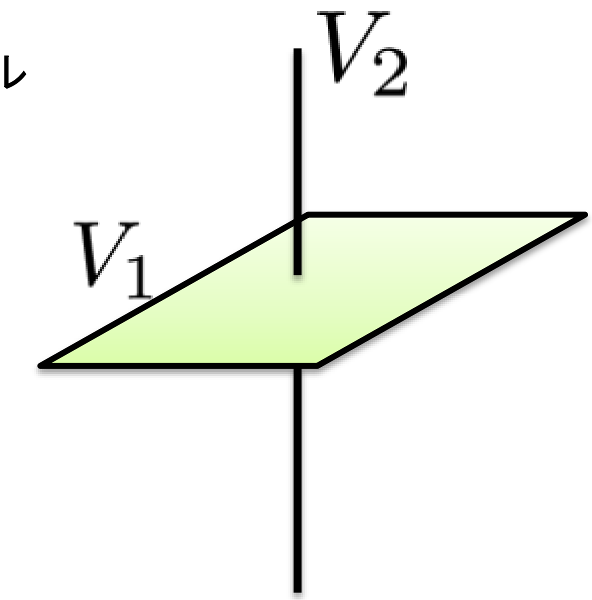
$V_1 \subsetneqq V$ より $\mathbf{I}(V) \subsetneqq \mathbf{I}(V_1)$ であるため，
$f \in \mathbf{I}(V_1) - \mathbf{I}(V)$ と $g \in \mathbf{I}(V_2)$ に対して*fg*は
$V = V_1 \cup V_2$ で消える（次ページ補足参照）．
ところが，**I**(*V*)は素イデアルなので，*f*または*g*の
どちらかは**I**(*V*)に属する. $f \notin \mathbf{I}(V)$ と選んだので
$g \in \mathbf{I}(V)$ である. これから $\mathbf{I}(V) = \mathbf{I}(V_2)$
よって $V = V_2$ □

（補足）具体的なイメージ

$$\mathbf{I}(V) = < xz, yz >$$

これは根基イデアル

$$\mathbf{I}(V_1) = < z >$$



$V(xz, yz)$

$$\mathbf{I}(V_1) - \mathbf{I}(V) = \langle z \rangle - \langle xz, yz \rangle$$

$$f \in \mathbf{I}(V_1) - \mathbf{I}(V)$$

は$V_1 - V_2$で消える関数となる

$$V_1 \cup V_2 = V$$

一方で*g*はV_2で消えるので，
*fg*はVで消える

命題5

kを無限体とし,$V \subset k^n$ をパラメータ付け

$$
\begin{aligned}
x_1 &= f_1(t_1, \ldots, t_m), \\
&\vdots \\
x_n &= f_n(t_1, \ldots, t_m)
\end{aligned}
$$

で定義された多様体とする. ここで, $f_1, \ldots, f_n$ は $k[t_1, \ldots, t_m]$ の多項式である. この時Vは既約である.

命題5の証明

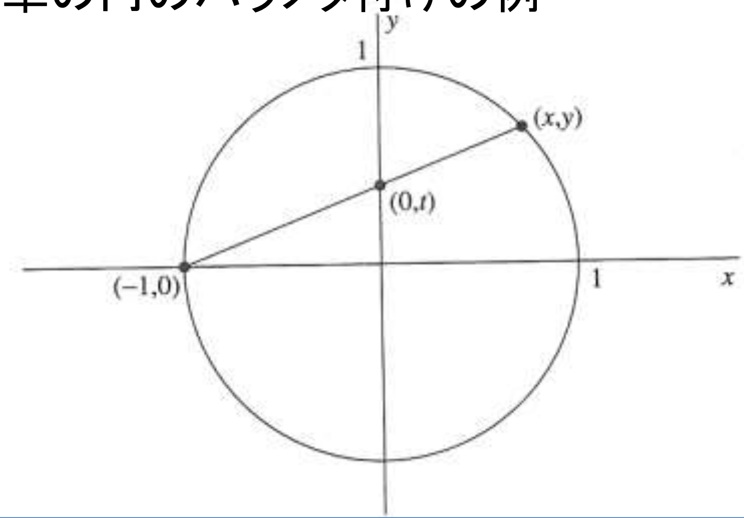
以下のように写像 $F : k^m \to k^n$ を定義する

$$F(t_1, \ldots, t_m) = (f_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, f_n(t_1, \ldots, t_m))$$

Vがパラメータ付けされているとは，Vが $F(k^m)$ のザリスキ閉包であることを意味する.

特に $\mathbf{I}(V) = \mathbf{I}(F(k^m))$ である.

第一章の円のパラメタ付けの例

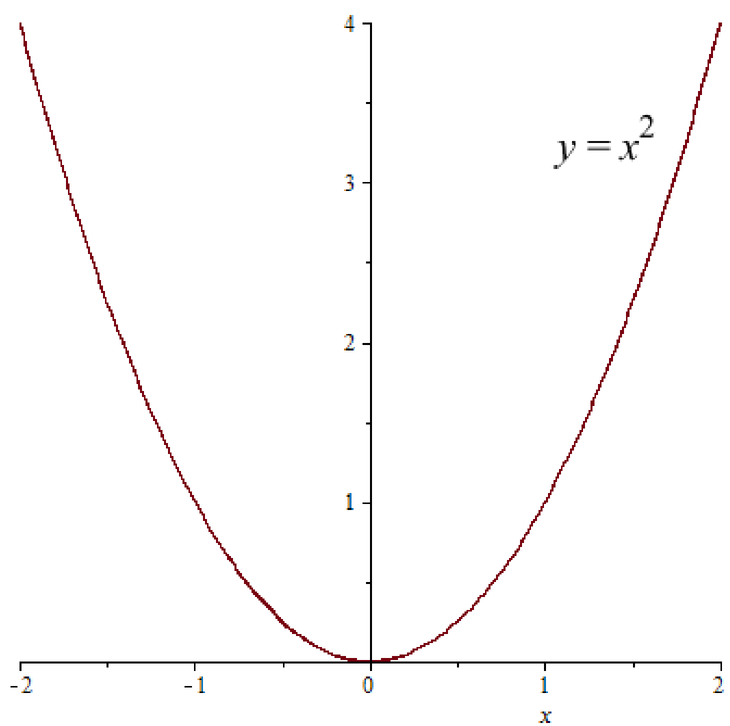


$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$y = \frac{2t}{1+t^2}.$$

パラメータ付けでは，(-1,0)以外の円上の点を全て表すことが出来る.

任意の多項式 $g \in k[x_1, .., x_n]$ に対して，$g \circ F$ は $k[t_1, .., t_m]$ の多項式である．*k*が無限体なので，$\mathbf{I}(V) = \mathbf{I}(F(k^m))$ はFとの合成が*k*[*t*]の零多項式となるような*k*[*x*]の多項式の集合（次ページ）



$$g(x, y) = y - x^2$$

$$f_1(t) = t$$

$$f_2(t) = t^2$$

$$g(f_1(t), f_2(t)) = t^2 - t^2 = 0$$

$$g \circ F = 0$$

$$\mathbf{I}(V) = \{g \in k[x_1, .., x_n] : g \circ F = 0\}$$

そこで $gh \in \mathbf{I}(V)$ と仮定する. このとき

$$(gh) \circ F = (g(F(t))h(F(t))) = (g \circ F)(h \circ F) = 0$$

となるので, $g \circ F = 0 \text{ or } h \circ F = 0$

つまり, $g \in \mathbf{I}(V) \,\mathrm{or}\, h \in \mathbf{I}(V)$

よってI(V)は素イデアルであり, Vは既約であることが示された.

命題6

*k*を無限体とする. $f_1, .., f_n, g_1, .., g_n \in k[t_1, .., t_m]$
*V*を有理パラメータ表示

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{f_1(t_1, \ldots, t_m)}{g_1(t_1, \ldots, t_m)}, \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{f_n(t_1, \ldots, t_m)}{g_n(t_1, \ldots, t_m)}
\end{aligned}
$$

で与えられた多様体とする. この時*V*は既約である.

命題6の証明

分母が0になる点

$W=\mathbf{V}(g_1 g_2\cdots g_n)$ とおき,$F:k^m-W\to k^n$を

$$F(t_1,\dots,t_m)=\left(\frac{f_1(t_1,\dots,t_m)}{g_1(t_1,\dots,t_m)},\cdots\frac{f_n(t_1,\dots,t_m)}{g_n(t_1,\dots,t_m)}\right)$$

と定義する.

この時Vは$F(k^m-W)$ のザリスキ閉包である.

$\mathbf{I}(V)$は関数 $h\circ F$ が$(t_1,\cdots,t_m)\in k^m-W$に対して零関数になるような$h\in k[x_1,\cdots,x_n]$全体の集合(但し$h\circ F$は多項式とは限らない).

$h \circ F$ が多項式とは限らない問題を以下のようにして解決する.

$h \in k[x_1, \cdots, x_n]$ とする. 任意の

$(t_1, \cdots, t_m) \in k^m - W$ に対して

$g_1(t_1, .., t_m) g_2(t_1, .., t_m) \cdots g_n(t_1, .., t_m) \neq 0$

なので,$(g_1 g_2 \cdots g_n)^N (h \circ F)$ は,$h \circ F$が0になる点 $(t_1, \cdots, t_m) \in k^m - W$ でゼロになる. *N*が*h*の全次数であるならば,$(g_1 g_2 \cdots g_n)^N (h \circ F)$ が

$k[t_1, .., t_m]$ 多項式になる.

前述のように$h \in \mathbf{I}(V)$と$(g_1 g_2 \cdots g_n)^N (h \circ F)$
が$(t_1, \cdots, t_m) \in k^m - W$で0になることは同値である. さらに, $g_1 g_2 \cdots g_n$ は*W*で0になることに注目すると, $(g_1 g_2 \cdots g_n)^N (h \circ F)$ は$k[x_1, \cdots, x_n]$全体で0になる. 従って

$$h \in \mathbf{I}(V) \Longleftrightarrow (g_1 g_2 .. g_n)^N (h \circ F) = 0 \in k[t_1, .., t_m]$$

これを用いて**I**(*V*)が素イデアルであることを示す.

$p, q \in k[x_1, .., x_n]$が$p, q \in \mathbf{I}(V)$であるとする．*p*と*q*の全次数を*M*，*N*とすると，*pq*の全次数は*M*+*N*になる．よって，先ほどの説明から

$$(g_1 g_2 .. g_n)^{N+M}(p \circ F) \cdot (q \circ F) = 0$$

になる．これは，$(g_1 g_2 .. g_n)^{M}(p \circ F) = 0$ と $(g_1 g_2 .. g_n)^{N}(q \circ F) = 0$ の$k[t_1, .., t_m]$の中での積である．従って，どちらかは零多項式でなければならない．よって$p \in \mathbf{I}(V)$または$q \in \mathbf{I}(V)$

これより**I**(*V*)は素イデアルであり，*V*が既約になる．

一点のイデアル

一点(a_1,..,a_n)はもっとも簡単な多様体.

$$\mathbf{I}(\{(a_1, .., a_n)\}) = \langle x_1 - a_1, .., x_n - a_n \rangle$$

演習問題　付録参照

この一点を表すイデアルは顕著な特徴をもつ.
これは極大である. つまり, このイデアルを真に含むイデアルは $k[x_1, .., x_n]$ のみである.

定義7：極大イデアル

イデアル$I \subset k[x_1,..,x_n]$が**極大イデアル**であるとは，$I \neq k[x_1,..,x_n]$ であり，*I* を含むイデアル *J* は *J* = *I* または$J = k[x_1,..,x_n]$ を満たすことである．

定義8：真部分イデアル

イデアル$I \subset k[x_1, .., x_n]$が真部分イデアルとは，*I*が$I \subset k[x_1, .., x_n]$に一致しないことと定める

まず，<x_1-a_1,..,x_n-a_n>の形のイデアルは極大であることを示す.

命題9

kを任意の体とする. $a_1, .., a_n \in k$ を用いて

$$I = \langle x_1 - a_1, .., x_n - a_n \rangle$$

の形に書けるイデアル $I \subset k[x_1, .., x_n]$ は極大である.

命題9の証明

Iを真に含んでいるイデアルJを考える．すると $f \in J$ で $f \notin I$ となるような元が存在する．割り算アルゴリズムを用いてfを

$$f = A_1(x_1 - a_1) + \cdots + A_n(x_n - a_n) + b$$

と書く．ここで $b \in k$.

$$A_1(x_1 - a_1) + \cdots + A_n(x_n - a_n) + b \in J$$

であり,$f \notin I$ であるから $b \neq 0$ である.

しかし, $f \in J$ であり

$$A_1(x_1 - a_1) + \cdots + A_n(x_n - a_n) \in I \subset J$$

であるから

$$b = f - (A_1(x_1 - a_1) + \cdots + A_n(x_n - a_n)) \in J$$

である. bはゼロでないので, 単位元であり

$$b = 1 \in J$$

$$\Downarrow$$

$$J = k[x_1, .., x_n]$$

命題10

kを任意の体とする. このとき $k[x_1, .., x_n]$ は素イデアルである.

命題10の証明

真部分イデアルIが素イデアルではないとする. このとき$f \notin I$ 及び$g \notin I$ で$fg \in I$となる元が存在する. ここでイデアル$\langle f \rangle + I$ を考える.

$f \notin I$ であるので$I \subsetneqq I + \langle f \rangle$

$I + \langle f \rangle = k[x_1, .., x_n]$だと仮に仮定すると,

$1 = cf + h, \quad h \in I, c \in k[x_1, .., x_n]$となる多項式c, hが存在する(補足参照). 両辺にgをかけると$g = cfg + hg \in I$となり, gの仮定に矛盾.

従ってI+<f>はIを真に含んだ真部分イデアルであり, Iは極大イデアルではない.

補足

イデアル$J = I + \langle f \rangle$ が$k[x_1,..,x_n]$である場合，

$$1 \in J = I + \langle f \rangle$$

Iの生成元を $I = \langle g_1, .., g_r \rangle$ とすると

$$1 = \sum_{i=1}^{r} a_i g_i + cf, \quad a_i, c \in k[x]$$

と出来る．一方で，Iは真部分イデアルなので

$$I \subsetneq k[x_1, .., x_n] \Rightarrow 1 \neq \sum_{i=1}^{r} a_i g_i$$

これから $c \neq 0$

定理11

*k*を代数的閉体とする. このとき $k[x_1,..,x_n]$ の極大イデアルはある $a_1,..,a_n \in k$ を用いて $\langle x_1 - a_1,..,x_n - a_n \rangle$ の形に書ける.

[証明]

定理11の証明

$I \subset k[x_1, .., x_n]$ を極大イデアルとする.

$I \neq k[x_1, .., x_n]$ であるから，弱形の零点定理より，$\mathbf{V}(I) \neq 0$ である. したがって，ある点が $(a_1, .., a_n) \in \mathbf{V}(I)$ となる. *I*の元である*f*は全て $(a_1, .., a_n)$ で消えることを意味する $f \in I(\{(a_1, .., a_n)\})$

つまり

$$I \subset I(\{(a_1, .., a_n)\})$$

$$I(\{(a_1,..,a_n)\}) = \langle x_1 - a_1, .., x_n - a_n\rangle$$

なので,

$$I \subset \langle x_1 - a_1, .., x_n - a_n\rangle \subsetneqq k[x_1, .., x_n]$$

I は極大なので

$$I = \langle x_1 - a_1, .., x_n - a_n\rangle$$

系12

kを代数的閉体とする. k^n の点と $k[x_1, .., x_n]$ の極大イデアルは, 1対1に対応する