三章　消去理論
§3 陰関数表示化

2012/12/6

担当　長谷川禎彦

記号

- 消去イデアル

$$I_\ell = I \cap k[x_{\ell+1}, ..., x_n]$$

- イデアルのアフィン多様体

$$\mathbf{V}(I) = \{(a_1, .., a_n) \in k^n | f(a_1, .., a_n) = 0 \text{ for } \forall f \in I\}$$

- 特に*I*の生成元が分かっている時は

$$I = \langle g_1, ..., g_s \rangle$$

$$\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(g_1, ... g_s)$$ P115の命題9

記号

- 消去イデアルのアフィン多様体 $\mathbf{V}(I_\ell)$

$$\mathbf{V}(I_\ell) = \{(a_1, .., a_n) \in k^n | f(a_1, .., a_n) = 0 \text{ for } \forall f \in I_\ell\}$$

G_ℓは消去イデアルI_ℓ のグレブナとすると

$$G = \text{Groebner}(I) = \langle g_1, ..g_s \rangle$$
$$G_\ell = G \cap k[x_{\ell+1}, .., x_n]$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{V}(I_\ell) = \mathbf{V}(g'_1, .., g'_s) \quad g'_i \in G_\ell$$

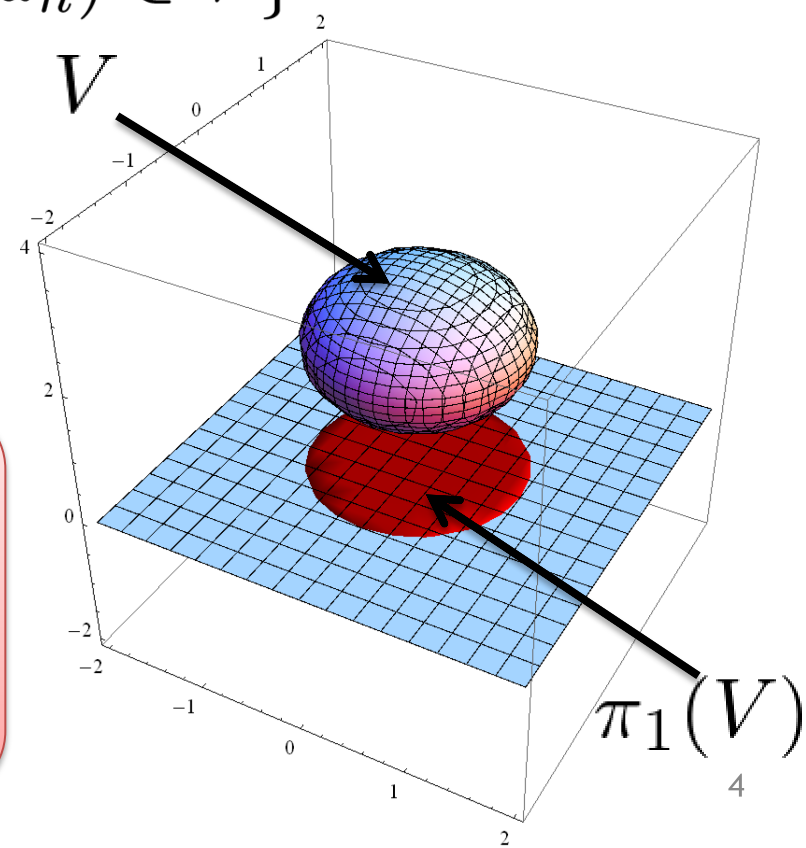
- 射影

$$\pi_\ell(a_1, \cdots, a_n) = (a_{\ell+1}, a_{\ell+2}, \cdots, a_n)$$

$$V = \mathbf{V}(f_1, .., f_s) \subset \mathbb{C}^n$$

$$\pi_\ell(V) = \{(a_{\ell+1}, .., a_n) : (a_1, .., a_n) \in V\}$$

幾何学的な射影と同じ.
$\pi_\ell(V)$はアフィン多様体
とは限らない.



$$\pi_\ell(V) \subset \mathbf{V}(I_\ell)$$ P179の補題1

さらに $\mathbf{V}(I_\ell)$ は $\pi_\ell(V)$を
含む最小のアフィン多様体
となっている[閉包定理]

陰関数表示化

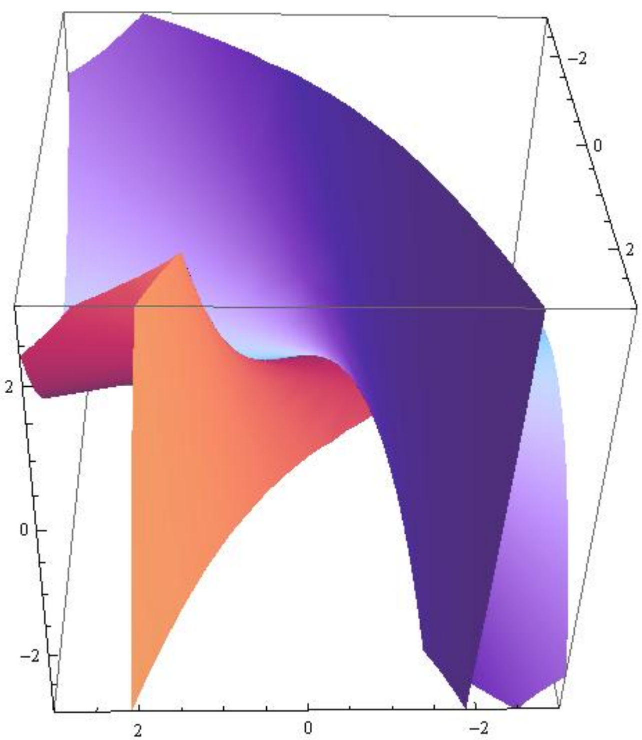
- パラメータ表示から陰関数表示を求める問題
  - パラメータ表示で与えられた点全体を含む最小の多様体Vの定義方程式を求めること

パラメータ表示

$$
\begin{aligned}
x &= t+u, \\
y &= t^2+2tu, \\
z &= t^3+3t^2u
\end{aligned}
$$

陰関数表示

$$x^3z-\frac{3}{4}x^2y^2-\frac{3}{2}xyz+y^3+\frac{1}{4}z^2=0$$



多項式パラメータ表示

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(t_1, \cdots, t_m) \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(t_1, \cdots, t_m) \end{aligned}$$

具体的な例

$$\begin{aligned} x &= t + u, \\ y &= t^2 + 2tu, \\ z &= t^3 + 3t^2u \end{aligned}$$

- このパラメータ表示は以下の写像で表すことが出来る

$$F : k^m \to k^n$$

$$F(t_1, \cdots, t_m) = \overbrace{(f_1(t_1, \cdots, t_m), \cdots, f_n(t_1, \cdots, t_m))}^{\text{n次元}}$$

陰関数表示と変数の消去

パラメータ表示の写像Fは多様体Vを定義する

$$V = \mathbf{V}(x_1 - f_1(t_1, .., t_m), \cdots, x_n - f_n(t_1, .., t_m)) \subset k^{n+m}$$

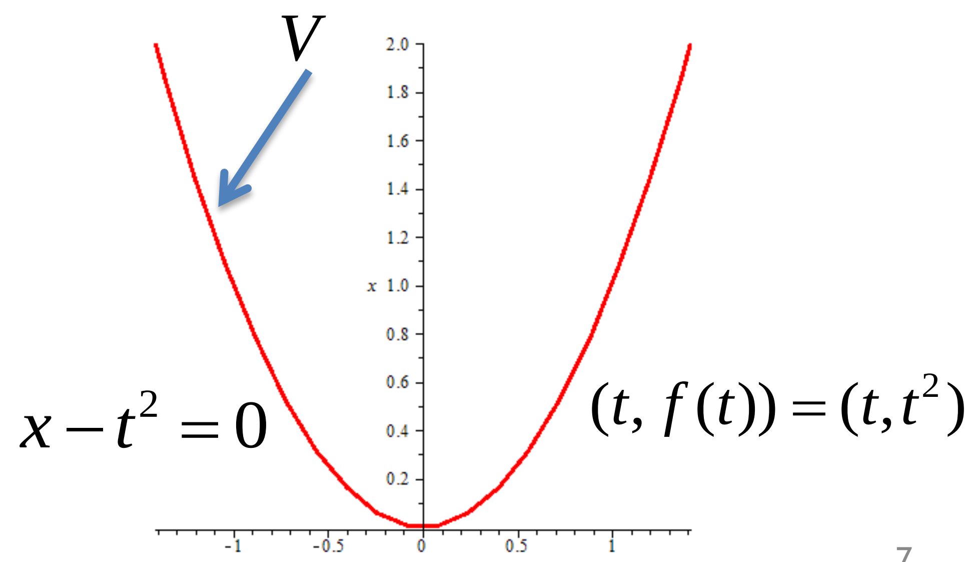
$(t_1, .., t_m, x_1, .., x_n)$のアフィン多様体

Vの点は

$$(t_1, \cdots, t_m, f_1(t_1, \cdots, t_m), \cdots, f_n(t_1, \cdots, t_m))$$

具体的な例

$$\left.\begin{array}{l} V = \mathbf{V}(x - f(t)) \subset \mathbb{R}^2 \\ f(t) = t^2 \end{array}\right\} \text{の場合}$$



これ以外に２つの写像を定義する $i : k^m \to k^{n+m}$

$\pi_m : k^{n+m} \to k^n$

$$i(t_1, \cdots, t_m) = (t_1, \cdots, t_m, f_1(t_1, \cdots, t_m), \cdots, f_n(t_1, \cdots, t_m))$$

$$\pi_m(t_1, \cdots, t_m, x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n)$$

これら三つの写像の関係を図示すると

$$\begin{tikzcd} & k^{n+m} \arrow[dr, "\pi_m"] & \\ k^m \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "F"] & & k^n \end{tikzcd}$$

注：Composition（合成）

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$F = \pi_m \circ i \qquad i(k^m) = V$ であるので

$$F(k^m) = (\pi_m \circ i)(k^m) = \pi_m(i(k^m)) = \pi_m(V)$$

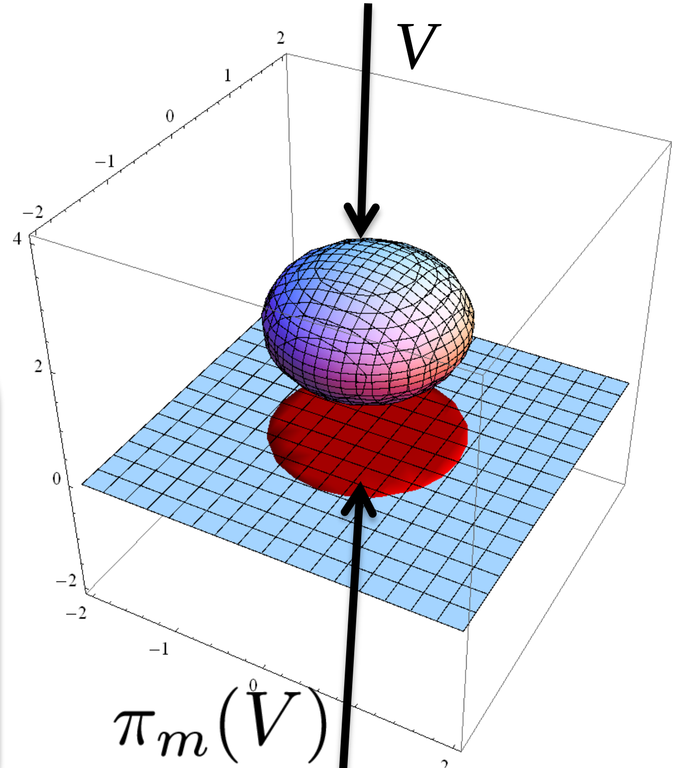
陰関数表示と変数の消去

パラメータ表示は射影である！

$$F(k^m) = \pi_m(V)$$

パラメータ付けの像はグラフの射影である.
消去法を用いて $F(k^m)$ を含む最小の多様体を求めることが可能.

$V = \mathbf{V}(x_1 - f_1, \cdots, x_n - f_n) \subset k^{n+m}$



$(x_1, .., x_n) =$
$(f_1(t_1, .., t_m), .., f_n(t_1, .., t_m))$
$\in k^n$

注意

- この例だと，どんな射影でも大体アフィン多様体で記述出来そうに思えるが，アフィン多様体で記述できないものは沢山ある

  ⇒　半代数的集合（semi-algebraic set）

定理1：多項式陰関数表示化

定理 1 (多項式陰関数表示化 (polynomial implicitization)) k を無限体と仮定しよう．$F : k^m \to k^n$ を，(2) の多項式のパラメータ付けによって決定される関数とする．さらに，イデアル I を $I = \langle x_1 - f_1, \ldots, x_n - f_n \rangle \subset k[t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_n]$ で定義し，$I_m = I \cap k[x_1, \ldots, x_n]$ を m 次の消去イデアルとする．このとき，$\mathbf{V}(I_m)$ は k^n において $F(k^m)$ を含む最小の多様体である．

主な登場変数

$F(k^m)$:パラメータ表示の作る空間

$\mathbf{V}_k(I_m)$:パラメータ部分を消した消去イデアルの多様体．これがパラメータ表示の空間を含む最小の多様体であることを示したい

$Z_k = \mathbf{V}_k(g_1, ..g_s)$:任意のパラメータ表示空間を含む多様体

定理1の証明
複素数体の場合

$V = \mathbf{V}(I) \subset k^{m+n}$ とする. $k = \mathbb{C}$ の場合は,

$F(k^m) = (\pi_m \circ i)(k^m) = \pi_m(i(k^m)) = \pi_m(V)$

より, $F(\mathbb{C}^m) = \pi_m(V)$

§2の閉包定理より, $\mathbf{V}(I_m)$ は $\pi_m(V)$ を含む最小の多様体である□

次に*k*が $\mathbb{C}$ の**部分体**である場合を考える

補足・部分体（subfield）

- F の部分集合SがF と同じ体の公理（要は四則演算規則）を満たす場合，S をFの部分体と呼ぶ
- 例
  - 有理数体は実数体の部分体
  - 実数体は複素数体の部分体

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

  - 逆に複素数体は実数体の**拡大体**

定理1の証明
複素数体の部分体の場合

*k*は$\mathbb{C}$の部分体であるとする．*k*は$\mathbb{C}$よりも真に小さい場合もあるので，閉包定理を用いることが出来ない．

ここで，体を明示した記法を導入する

$$\mathbf{V}_k(I_m) \subset k^n$$

$$\mathbf{V}_k(I_m) = \{(a_1, .., a_n) \in k^n | f(a_1, .., a_n) = 0 \text{ for } \forall f \in I_m\}$$

部分体*k*においても消去イデアルI_mは$\mathbb{C}$の場合と同じである．

式(4)

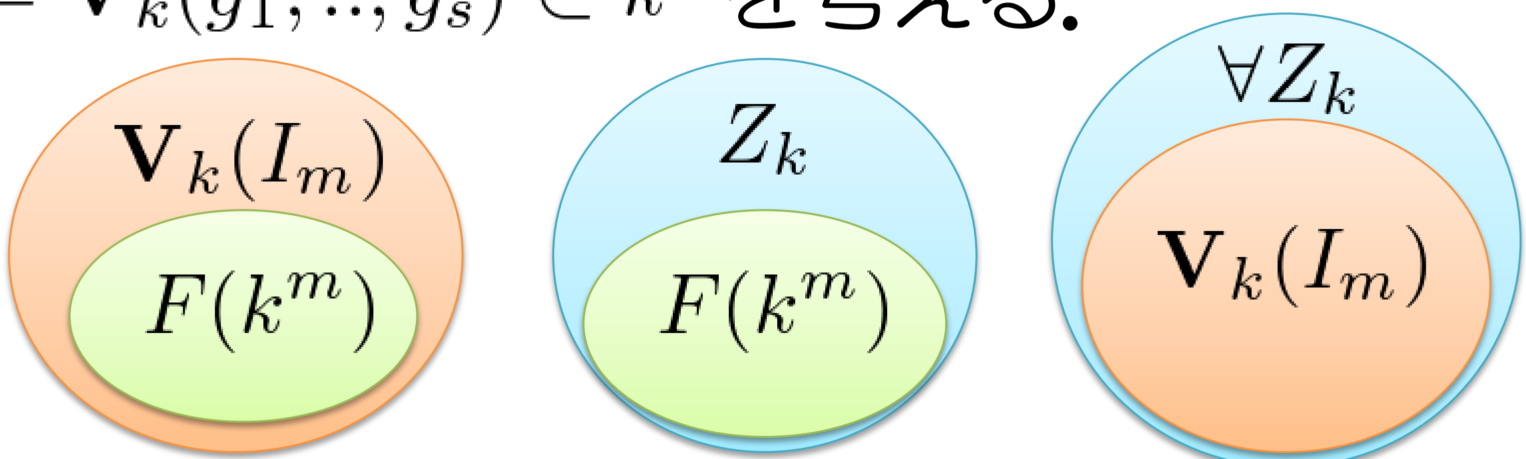
$$F(k^m) = (\pi_m \circ i)(k^m) = \pi_m(i(k^m)) = \pi_m(V_k)$$

と，§2の補題1 $\pi_m(V_k) \subset \mathbf{V}_k(I_m)$

から $F(k^m) = \pi_m(V_k) \subset \mathbf{V}_k(I_m)$

次に $\mathbf{V}_k(I_m)$ の最小性を導く

ここで，$F(k^m) \subset Z_k$ となる，任意の多様体 $Z_k = \mathbf{V}_k(g_1, .., g_s) \subset k^n$ を考える.



分かっていること　　仮定したこと　　示したいこと

Z_k の上では$g_i=0$ となるので，それより小さい$F(k^m)$上でも$g_i=0$ となる

$(g_i \circ F)(t)=0 \quad t \in k^m$

また, $g_i \circ F$ はkの多項式である

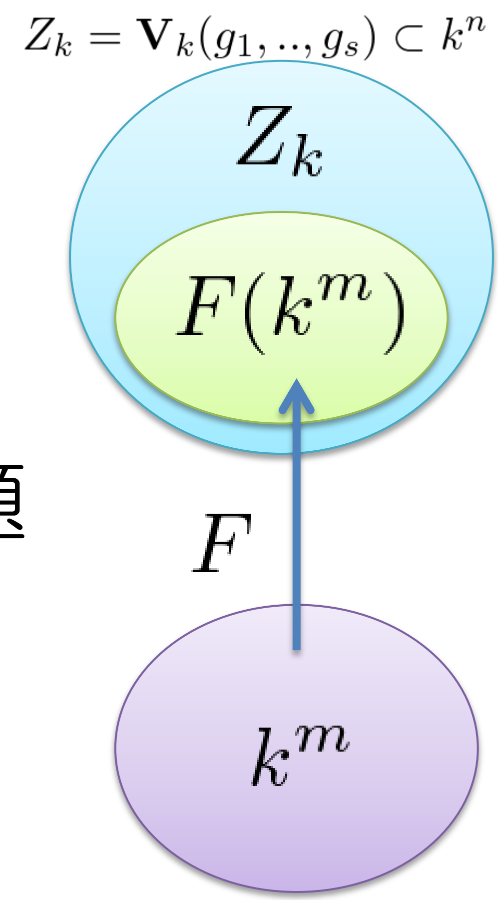
$g_i \circ F \in k[t_1,\ldots,t_m]$

kは無限体であることと§1の命題5より, $g_i \circ F$ はゼロ関数である

つまり，$(g_i \circ F)(t)=0 \quad t \in \mathbb{C}^m$

又 $g_i(x)=0 \quad x \in F(\mathbb{C}^m)$

これより$F(\mathbb{C}^m) \subset \mathbf{V}_{\mathbb{C}}(g_1,..,g_s) = Z_{\mathbb{C}}$

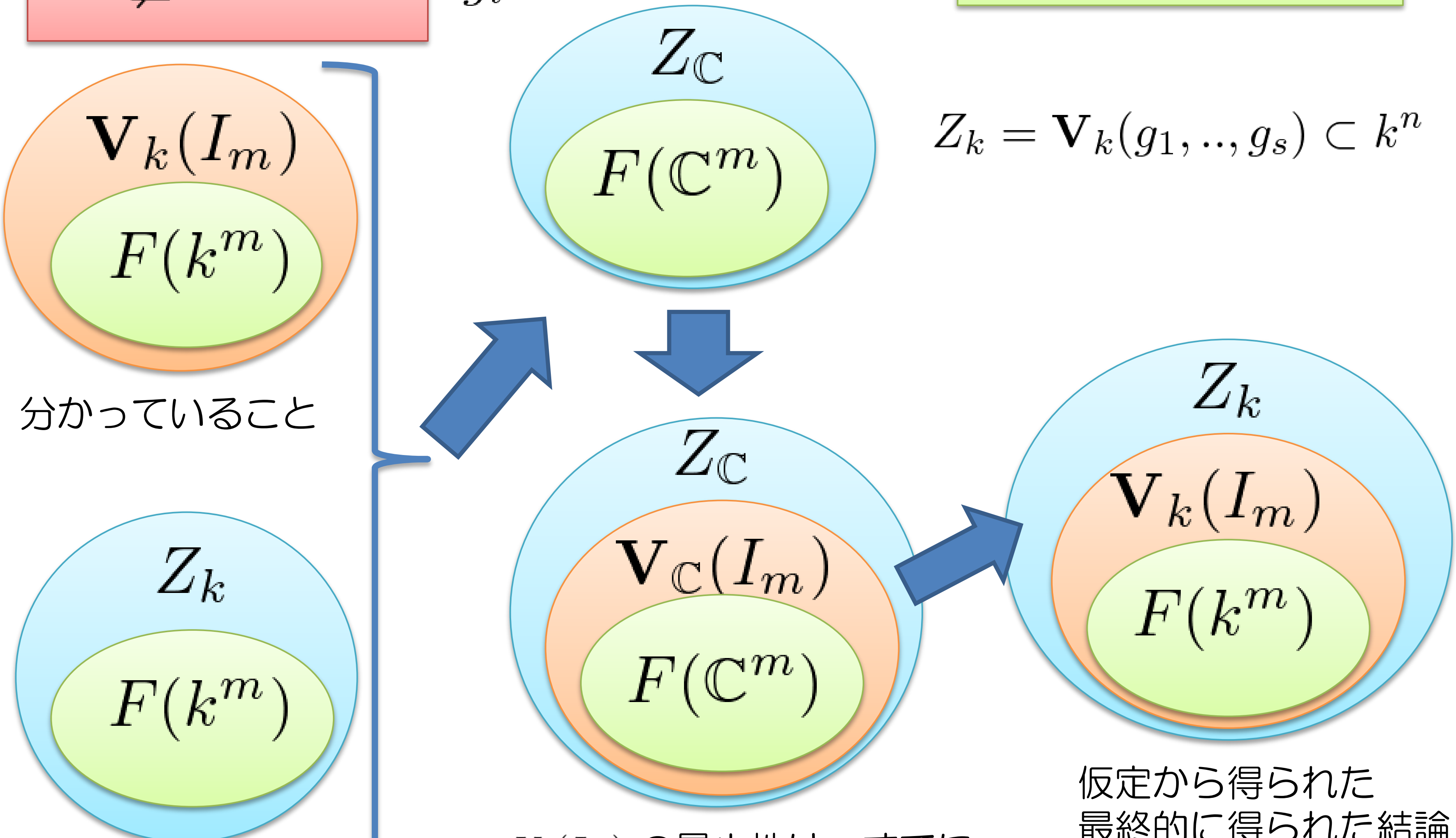


$k \subsetneq \mathbb{C}$ でも良い

ここの矢印は
$g_i \circ F$ がゼロ多項式による

（ゼロ多項式になるのは
kが無限体であるから）

$Z_k = \mathbf{V}_k(g_1, .., g_s) \subset k^n$



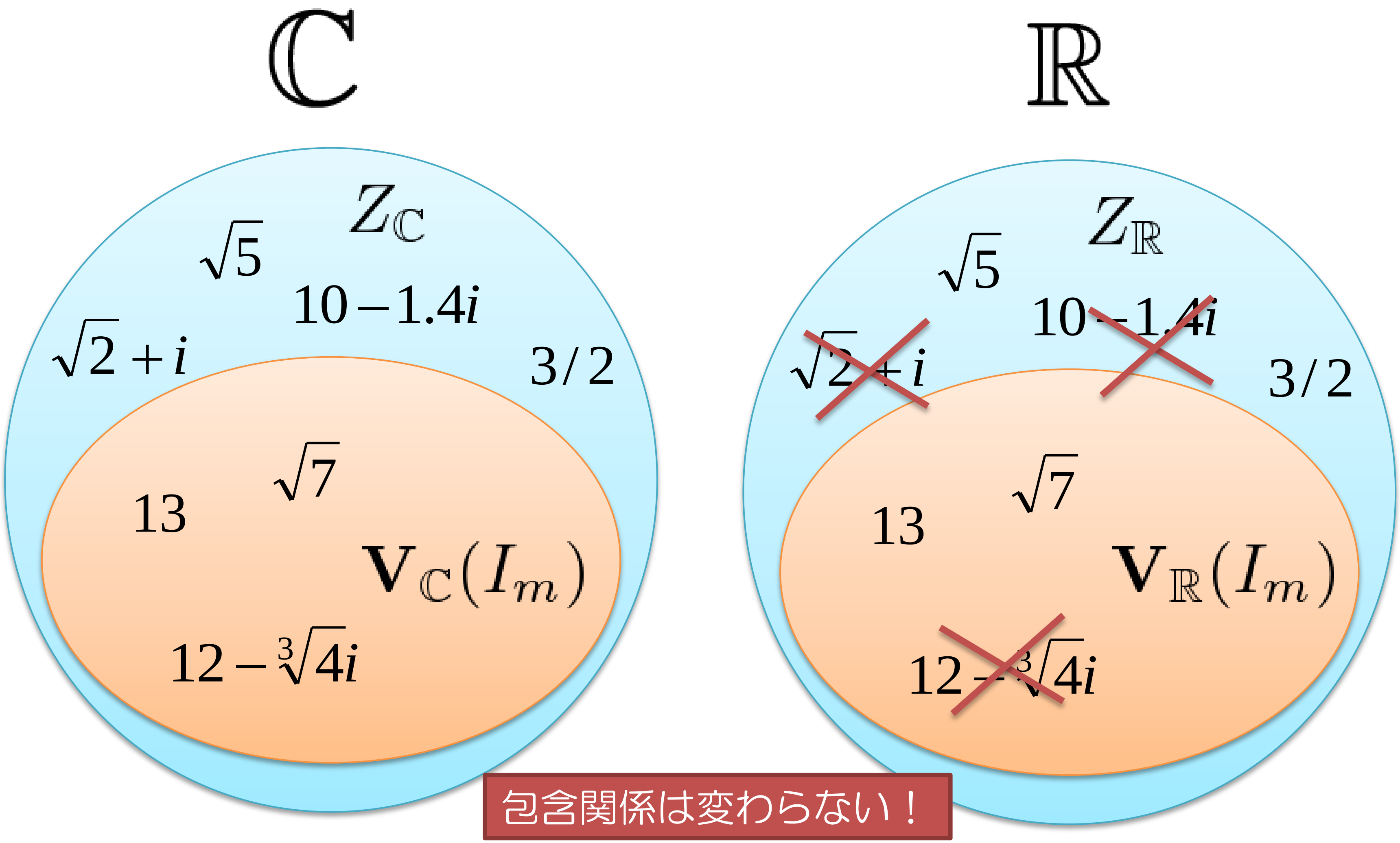
分かっていること

証明の仮定
Z_k の仮定

$V_{\mathbb{C}}(I_m)$ の最小性は，すでに
証明済み

仮定から得られた
最終的に得られた結論
（$V_k(I_m)$ の最小性
が言えた）

最後の⇒部分のイメージ


$\mathbb{C}$
$Z_{\mathbb{C}}$
$\sqrt{5}$
$10-1.4i$
$\sqrt{2}+i$
$3/2$
$\sqrt{7}$
13
$\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(I_m)$
$12-\sqrt[3]{4}i$
$\mathbb{R}$
$Z_{\mathbb{R}}$
$\sqrt{5}$
$\cancel{10-1.4i}$
$\cancel{\sqrt{2}+i}$
$3/2$
$\sqrt{7}$
13
$\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(I_m)$
$\cancel{12-\sqrt[3]{4}i}$
包含関係は変わらない！

定理1の証明
kが$\mathbb{C}$に含まれない無限体の場合

- この場合も成り立つ

パラメータ表示から最小の多様体を求める形式的な方法

パラメータ表示

$$(x_1, x_2, ..) = (f_1(\mathbf{t}), f_2(\mathbf{t}), ..) \qquad f_1, .., f_n \in k[t_1, .., t_m]$$

イデアルを形成

$$I = \langle x_1 - f_1(\mathbf{t}), .., x_n - f_n(\mathbf{t}) \rangle \subset k^{n+m}$$

Iのグレブナ基底を計算

$$G = \mathrm{Groebner}(I) \qquad \mathrm{lex}(t_1, .., t_m, x_1, .., x_n)$$

tを含まない基底を選ぶ

$$G_m = G \cap k[x_1, .., x_n]$$

選んだ基底で張られるイデアルがパラメータ表示を含む最小の多様体

$$V = \mathbf{V}(G_m) = \mathbf{V}(h_1, .., h_s) \qquad G_m = \langle h_1, .., h_s \rangle$$

具体例

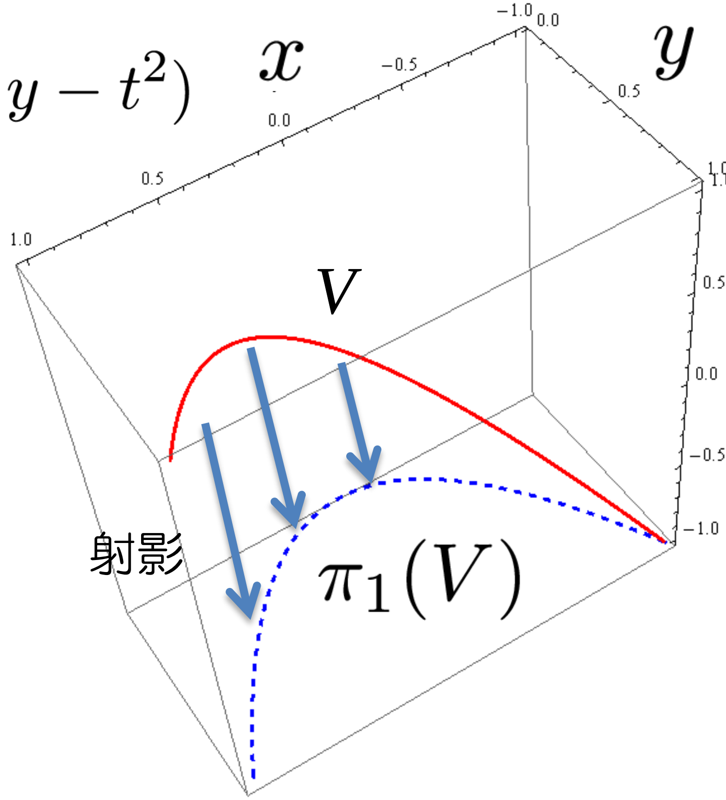
$(x, y) = (f_x(t), f_y(t)) = (t, t^2)$ の場合を考える

$$V = \mathbf{V}(x - f_x(t), y - f_y(t)) = \mathbf{V}(x - t, y - t^2)$$

$$\begin{gathered} || \\ (t, f_x(t), f_y(t)) = (t, t, t^2) \end{gathered}$$

$$\Big\Downarrow \pi_1$$

$$\pi_1(V) = \{(t, t^2) : t \in \mathbb{R}\}$$



$\mathbf{V}(I_1)$ $x - t$ と $y - t^2$ から上手くtを消去した多項式からなるアフィン多様体

$$\pi_1(V) \subset \mathbf{V}(I_1) = \mathbf{V}(y - x^2)$$

陰関数表示化の例

$$I = \langle x - t - u, y - t^2 - 2tu, z - t^3 - 3t^2 u \rangle \subset \mathbb{R}[t, u, x, y, z]$$

$$g_1 = t + u - x,$$

$$I_1 \left\{ \begin{array}{l} g_2 = u^2 - x^2 + y, \\ g_3 = ux^2 - uy - x^3 + (3/2)xy - (1/2)z, \\ g_4 = uxy - uz - x^2 y - xz + 2y^2, \\ g_5 = uxz - uy^2 + x^2 z - (1/2)xy^2 - (1/2)yz, \\ g_6 = uy^3 - uz^2 - 2x^2 yz + (1/2)xy^3 - xz^2 + (5/2)y^2 z, \\ I_2 \left\{ g_7 = x^3 z - (3/4)x^2 y^2 - (3/2)xyz + y^3 + (1/4)z^2. \right. \end{array} \right.$$

陰関数表示化の例

- 多項式陰関数表示化定理により，二次の消去イデアルI_2は

$$F(\mathbb{R}^2) \subset \mathbf{V}(I_2) \subset \mathbb{R}^3$$

$$F(u,t) = (t+u, t^2+2tu, t^3+3t^2u)$$

- 逆に，曲面Fが$\mathbf{V}(I_2)$の点全てを覆い尽くしているかは分からない

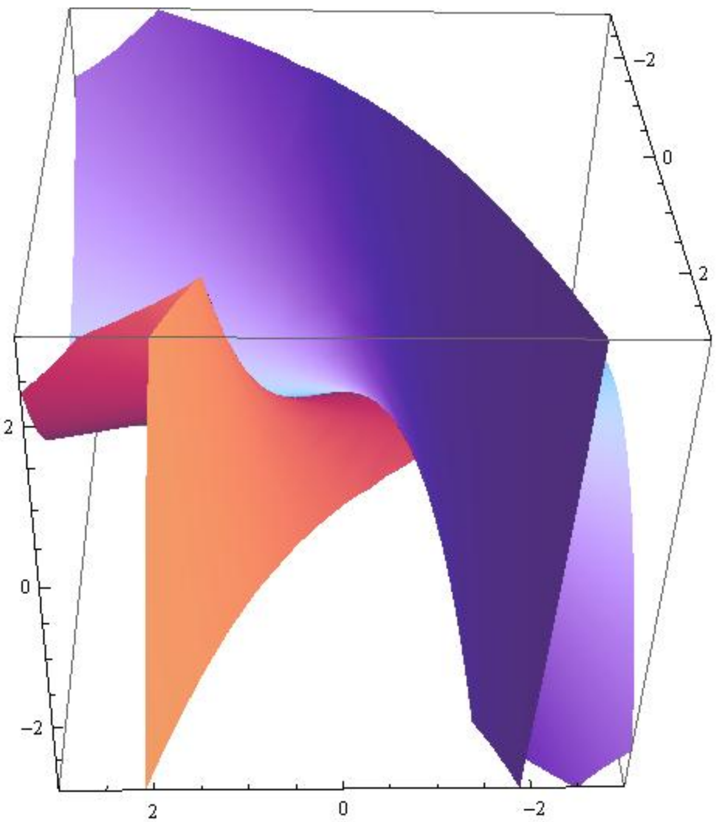
$$F(k^m) \supset \mathbf{V}(I_m) \quad \Rightarrow \quad F(k^m) = \pi_m(V) = \mathbf{V}(I_m)$$

  – これは一般的には言えないが，場合によっては成り立つ

陰関数表示化の例

パラメータ表示では「多様体でない場合」が存在する

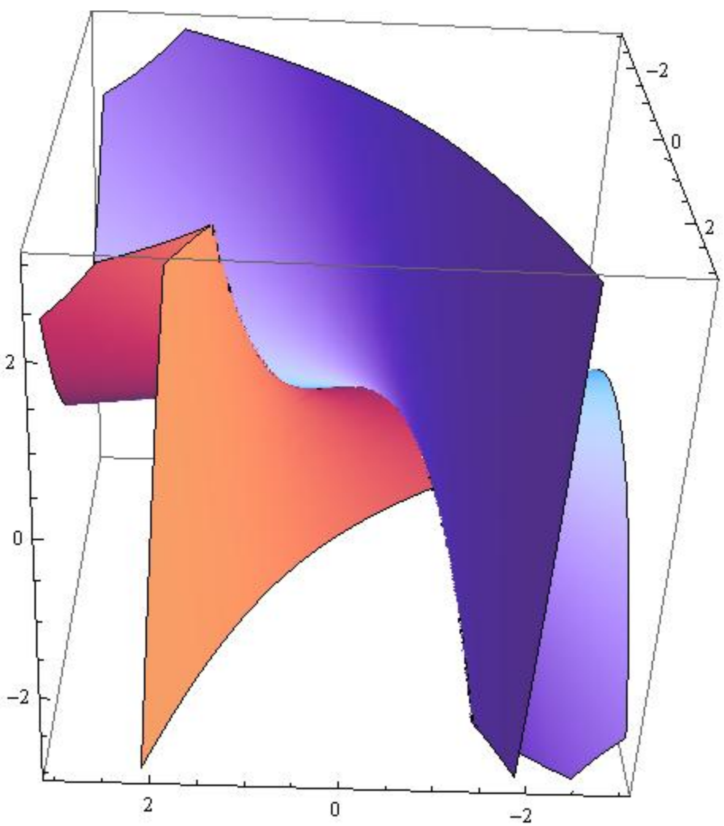
パラメータ表示



$$\subset$$

$$=?, \neq ?$$

陰関数表示



陰関数表示化の例

ここが，定数なので拡張定理（系4）より
(x,y,z)は(u,x,y,z)に拡張できる.

$$g_1 = t + u - x,$$

$$g_2 = \boxed{u^2} - x^2 + y,$$

$$g_3 = ux^2 - uy - x^3 + (3/2)xy - (1/2)z,$$

$$g_4 = uxy - uz - x^2y - xz + 2y^2,$$

$$g_5 = uxz - uy^2 + x^2z - (1/2)xy^2 - (1/2)yz,$$

$$g_6 = uy^3 - uz^2 - 2x^2yz + (1/2)xy^3 - xz^2 + (5/2)y^2z,$$

$$g_7 = x^3z - (3/4)x^2y^2 - (3/2)xyz + y^3 + (1/4)z^2.$$

陰関数表示化の例

ここが，定数なので拡張定理（系4）より
(u,x,y,z)は(t,u,x,y,z)に拡張できる.

$$
\begin{aligned}
g_1 &\boxed{= t +} u - x,\\
g_2 &= u^2 - x^2 + y,\\
g_3 &= ux^2 - uy - x^3 + (3/2)xy - (1/2)z,\\
g_4 &= uxy - uz - x^2y - xz + 2y^2,\\
g_5 &= uxz - uy^2 + x^2z - (1/2)xy^2 - (1/2)yz,\\
g_6 &= uy^3 - uz^2 - 2x^2yz + (1/2)xy^3 - xz^2 + (5/2)y^2z,\\
g_7 &= x^3z - (3/4)x^2y^2 - (3/2)xyz + y^3 + (1/4)z^2.
\end{aligned}
$$

陰関数表示化の例

$$g_1 = t + u - x,$$
$$g_2 = u^2 - x^2 + y,$$
$$g_3 = ux^2 - uy - x^3 + (3/2)xy - (1/2)z,$$
$$g_4 = uxy - uz - x^2y - xz + 2y^2,$$
$$g_5 = uxz - uy^2 + x^2z - (1/2)xy^2 - (1/2)yz,$$
$$g_6 = uy^3 - uz^2 - 2x^2yz + (1/2)xy^3 - xz^2 + (5/2)y^2z,$$
$$g_7 = x^3z - (3/4)x^2y^2 - (3/2)xyz + y^3 + (1/4)z^2.$$

これから，(x,y,z)が実数の時，t,uは実数

陰関数表示化の例

- 一般に，パラメータ表示が，その定義する多様体のすべての点を覆い尽くしているかどうかのチェックは難しい
  - 個別に解析するしかない

有理多項式によるパラメータ付け

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{u^2}{v} \\
y &= \frac{v^2}{u} \\
z &= u
\end{aligned}
$$

- 分母を単純にはらって作ったイデアル

$$I = \langle vx - u^2, uy - v^2, z - u \rangle \subset k[u, v, x, y, z]$$

- 消去イデアル

$$I_2 = I \cap k[x, y, z] = \langle z(x^2y - z^3) \rangle$$

有理多項式によるパラメータ付け

$$\mathbf{V}(I_2) = \mathbf{V}(x^2y - z^3) \cup \mathbf{V}(z)$$

- この多様体はパラメータ表示を含む最小の多様体ではない
- このように単純に分母を払うのではうまくいかない

有理パラメータ付け

- 有理多項式によるパラメータつけの一般形

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{f_1(t_1, ..., t_m)}{g_1(t_1, ..., t_m)} \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{f_n(t_1, ..., t_m)}{g_n(t_1, ..., t_m)}
\end{aligned}
$$

- 分母が0になるところがあるかもしれないので， k^m 全てでは定義されない

有理パラメータ付け

$$W = \mathbf{V}(g_1 g_2 \cdots g_n) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{V}(g_i) \subset k^m$$

とおくと，*W*では g_i が0となる.

以下の写像*F*を考える

$$F(t_1, \cdots, t_m) = \left(\frac{f_1(t_1, .., t_m)}{g_1(t_1, .., t_m)}, \cdots, \frac{f_n(t_1, .., t_m)}{g_n(t_1, .., t_m)} \right)$$

$$F : k^m - W \to k^n$$

$$\begin{tikzcd} & k^{n+m} \arrow[dr, "\pi_m"] & \\ k^m - W \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "F"] & & k^n \end{tikzcd}$$

有理パラメータ付け

$i(k^m - W) \subset \mathbf{V}(I)$ である．ここで，*I*は分母を払って得られるイデアルである：

$$I = \langle g_1 x_1 - f_1, .., g_n x_n - f_n \rangle$$

ただし，$\mathbf{V}(I)$ が$i(k^m - W)$ を含む最小の多様体ではないかもしれない．

（実際にそうではない．*I*には，分母が0になる点が含まれている）

余分な変数を使って分母をコントロールする

$g = g_1 g_2 \cdots g_n$ とすると $W = \mathbf{V}(g) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{V}(g_i)$

次のイデアルを考える

$$J = \langle g_1 x_1 - f_1, .., g_n x_n - f_n, 1 - gy \rangle \subset k[y, t_1, ..t_m, x_1, .., x_n]$$

これに合わせて新しい写像を導入する

$$j(t_1, .., t_m) = \left(\frac{1}{g(t_1, .., t_m)}, t_1, .., t_m, \frac{f_1(\cdots)}{g_1(\cdots)}, .. \frac{f_n(\cdots)}{g_n(\cdots)} \right)$$

$$\pi_{m+1}(y, t_1, .., t_m, x_1, .., x_n) = (x_1, .., x_n)$$

$$\pi_{m+1} : k^{n+m+1} \to k^n \qquad j : k^m - W \to k^{n+m+1}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & k^{n+m+1} & & \\ & j \nearrow & & \searrow \pi_{m+1} & \\ k^m - W & & \xrightarrow{F} & & k^n \end{array}$$

$$F = \pi_{m+1} \circ j$$

ここで $\boxed{j(k^m - W) = \mathbf{V}(J)}$

$j(k^m - W) \subset \mathbf{V}(J)$は自明

（jの座標をJに代入するだけ）

逆に$(y, t_1, .., t_m, x_1, .., x_n) \in \mathbf{V}(J)$の場合,

$g(t_1, \cdots, t_m)y = 1$よりどのg_iでも点

は消えない

そのため，xとyに関して

$$x_i = f_i(t_1, \cdots, t_m)/g_i(t_1, \cdots, t_m)$$
$$y = \frac{1}{g(t_1, \cdots, t_m)}$$

と表すことができ，これらの点は$j(k^m - W)$に含まれる．よって$\mathbf{V}(J) \subset j(k^m - W)$ が示される

$$\boxed{j(k^m - W) = \mathbf{V}(J)}$$

定理2：有理陰関数表示化

$F = \pi_{m+1} \circ j$ と $j(k^m - W) = \mathbf{V}(J)$ から

$$F(k^m - W) = \pi_{m+1}(j(k^m - W)) = \pi_{m+1}(\mathbf{V}(J))$$

有理パラメータ表示も射影である！

定理 2 (有理陰関数表示化 (rational implicitization)) k を無限体とする．$F : k^m - W \to k^n$ を有理関数によるパラメータ付け (6) により定まる関数であるとする．J をイデアル $J = \langle g_1 x_1 - f_1, \ldots, g_n x_n - f_n, 1 - gy \rangle \subset k[y, t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_n]$ とする．ここで $g = g_1 g_2 \cdots g_n$ である．$J_{m+1} = J \cap k[x_1, \ldots, x_n]$ を $(m+1)$ 次の消去イデアルとする．このとき，$\mathbf{V}(J_{m+1})$ は $F(k^m - W)$ を含む k^n の最小の多様体である．

有理パラメータ表示から最小の多様体を求める形式的な方法

$$f_1, g_1, ..., f_n, g_n \in k[t_1, .., t_m]$$

$$x_i = f_i/g_i$$ パラメータ表示

$$J = \langle g_1 x_1 - f_1, .., g_n x_n - f_n, 1 - gy \rangle$$

Jのグレブナ基底を計算

$$G = \mathrm{Groebner}(J) \quad \mathrm{lex}(y, t_1, .., t_m, x_1, .., x_n)$$

y,tを含まない基底を選ぶ

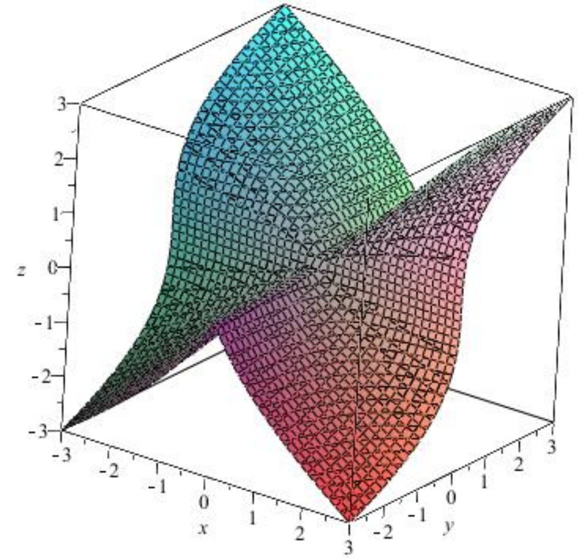
$$G_{m+1} = G \cap k[x_1, .., x_n]$$

選んだ基底で張られるイデアルがパラメータ表示を含む最小の多様体

$$V = \mathbf{V}(G_{m+1}) = \mathbf{V}(h_1, .., h_s)$$

$$G_{m+1} = \langle h_1, .., h_s \rangle$$

具体例



$$
\begin{aligned}
x &= u^2/v \\
y &= v^2/u \\
z &= u
\end{aligned}
$$

$$J = \langle vx - u^2, uy - v^2, z - u, 1 - uvw \rangle$$

グレブナ基底

$$\langle -z^3 + x^2y, zv - xy, -z^2 + xv, -zy + v^2, -z + u, z^3w - x, z^2yw - v, -1 + xyw \rangle$$

$$J_3 = \langle -z^3 + x^2y \rangle$$

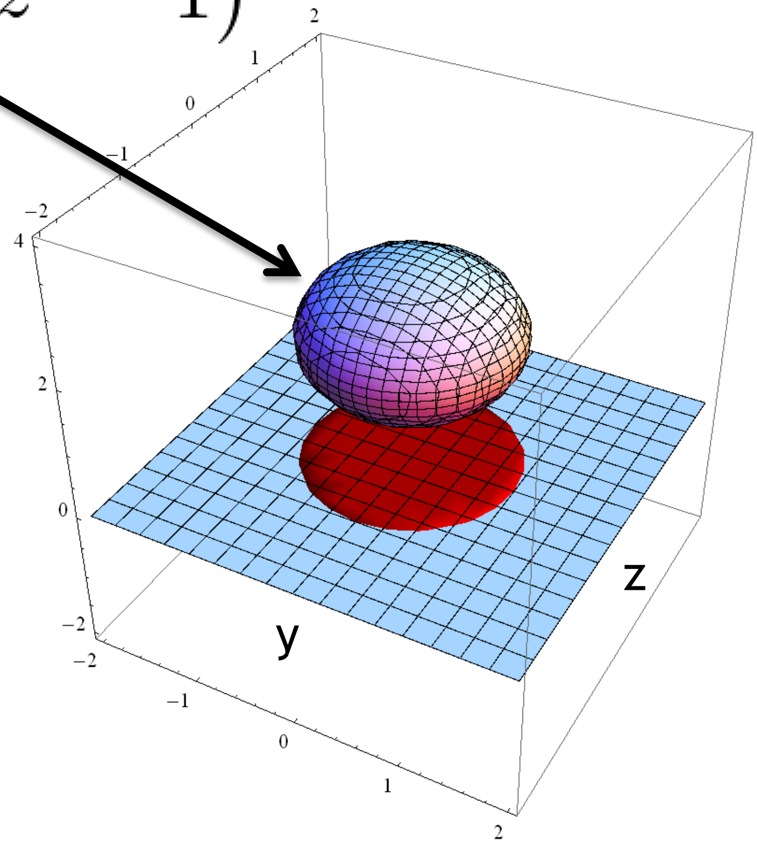
$$\mathbf{V}(x^2y - z^3)$$

分母をはらっただけの
アフィン多様体
$\mathbf{V}(z(x^2y - z^3))$

補足：半代数的集合

$$I = \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1 \rangle$$

$$\mathbf{V}\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right)$$



Vの射影を考えると

$$\pi_x(\mathbf{V}\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right)) \to y^2 + z^2 \leq 1$$

アフィン多様体ではない！

$$\mathrm{Groebner}(I) = \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1 \rangle$$

消去イデアル

$$I_x = I \cap \mathbb{R}[y, z] = \langle 0 \rangle$$

$\mathbf{V}(0) \longrightarrow$ y, z平面すべて！

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbf{V}(\langle 0 \rangle)$$

補足：半代数的集合

- 不等号を含む実数上の領域は”semi-algebraic set”(半代数的集合)と呼ばれる
- 半代数的集合は射影に関して閉じている
  – 半代数的集合の射影は半代数的集合
- 半代数的集合に関する計算代数幾何の有名なアルゴリズムがある
  – Cylindrical Algebraic Decomposition
    - Collins 1973
    - 後日論文紹介します

END

復習・閉包定理

定理 3 (閉包定理 (Closure Theorem)) $V = \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s) \subset \mathbb{C}^n$ とおき，I_l を $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ の l 次の消去イデアルとする．このとき次が成り立つ．

(i) $\mathbf{V}(I_l)$ は $\pi_l(V) \subset \mathbb{C}^{n-l}$ を含む最小のアフィン多様体である．

(ii) $V \neq \emptyset$ であるとき，$\mathbf{V}(I_l) - W \subset \pi_l(V)$ となるアフィン多様体 $W \subsetneq \mathbf{V}(I_l)$ がある．

復習・拡張定理（系4）

系 4　イデアル $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ をとり，ある i に対して f_i が次の形をしているとする．

$$f_i = cx_1^N + (x_1 \text{ の次数が } < N \text{ である項}).$$

ここで，$c \in \mathbb{C}$ はゼロではなく $N > 0$ である．もし，I_1 が I の 1 次の消去イデアルで $(a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(I_1)$ とすると，$a_1 \in \mathbb{C}$ が存在して $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(I)$ となる．